Università degli Studi di Torino

Facoltà di Scienze M.F.N.

Tesina per il Laboratorio di Combinatorica

di

Barbara Rosso

I QUADRATI LATINI

Anno accademico 2007-2008

Giugno 2008

L'oggetto principale di questa tesina sono i quadrati latini; tali entità matematiche, introdotte da Eulero nel XVIII secolo, si scoprono essere legate in modo diretto ad applicazioni pratiche impensabili, se non ci si limita a considerarne il solo aspetto "ludico".

Gioco: disporre in una griglia di 3 caselle per 3 i simboli ♌ ♎ e ♐, in modo che in ogni riga e in ogni colonna della griglia non si ripeta mai lo stesso simbolo.

Una possibile soluzione è rappresentata in figura.
Ogni soluzione a questo semplice gioco rappresenta un quadrato latino.

♌	♐	♎
♎	♌	♐
♐	♎	♌

Definizione: Un **quadrato latino** di ordine n è una griglia quadrata di $n \times n$ caselle nella quale compaiono n simboli diversi, che soddisfa le seguenti condizioni:
1) in ogni cella della griglia compare un simbolo;
2) in ogni riga e in ogni colonna ciascun simbolo compare una volta sola.
Si usano di solito come simboli gli interi da 1 a n.

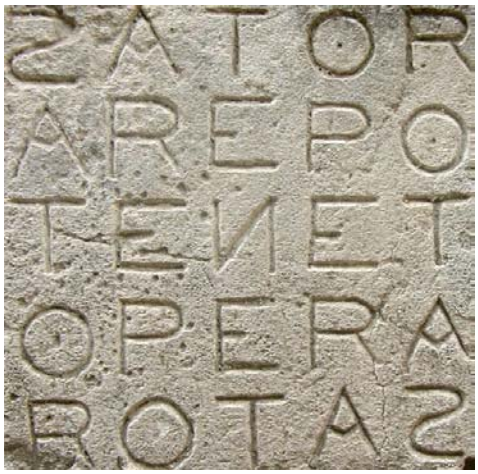
Sono esempi di quadrati latini:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	4	2	1
1	2	4	3
2	3	1	4
4	1	3	2

Curiosità storica

Su un numero sorprendentemente vasto di reperti archeologici è visibile il cosiddetto Quadrato del Sator, o Latercolo Pompeiano, dal luogo nel quale fu rinvenuto la prima volta (in foto).



Esso è erroneamente associato ai quadrati latini: non ne rappresenta uno perché i simboli disposti nella griglia 5x5 sono più di 5 (S,A,T,O,R,E,P); inoltre nella terza riga e terza colonna i simboli T ed E sono ripetuti.

Curiosità Letteraria

La sestina lirica è una struttura poetica costituita da 6 stanze di 6 versi (più 3 di congedo). Una delle regole secondo cui viene costruita prevede che ogni verso termini con una tra 6 parole possibili, le quali non possono comparire due volte nella stessa stanza, né due volte nello stesso verso di stanze diverse. Scrivendo queste parole all'interno di un quadrato, in funzione della stanza e del verso in cui compaiono, si costruisce un quadrato latino.

Equivalenze di Quadrati Latini

Permutando tra loro due righe o due colonne in un quadrato latino quello che si ottiene è un altro quadrato latino; più precisamente due quadrati latini si dicono *isotopici* (o isotopi) se possono essere ottenuti l'uno dall'altro mediante permutazione delle righe o permutazione delle colonne.

Si dimostra che l'*isotopia* è una relazione di equivalenza.

Prop. La relazione di isotropia è una relazione di equivalenza.

Dim. Siano A, B e C tre quadrati latini isotropi; B ottenibile da A con n permutazioni e C ottenibile da B con m permutazioni. Allora:

- A è ottenibile da A con zero permutazioni (proprietà riflessiva)
- B è ottenibile da A con lo stesso numero n di permutazioni, ma applicate in ordine inverso (proprietà simmetrica)
- C è ottenibile da A con al più $n+m$ permutazioni; basta passare da A a B e da B a C (proprietà transitiva)

Nesso tra Quadrati Latini e Semigruppi

Definizione: Un **semigruppo** $(S,\otimes)$ è un insieme S con una operazione binaria $(\otimes)$ tale che:

- $a \otimes b \in S, \forall\, a, b \in S$
- dati $a, b \in S$, le equazioni

  $a \otimes x = b$

  $y \otimes a = b$

  hanno un'unica soluzione per ogni x e y.

Un esempio semplice di semigruppo finito è l'insieme $S = \{ 0, 1, 2 \}$ con l'operazione $\otimes$ definita da: $a \otimes b = 2a + b + 1$, dove le addizioni e le moltiplicazioni sono le usuali operazioni modulo 3.

Scrivendo la tabella di $\otimes$ otteniamo:

$\otimes$	0	1	2
0	1	2	0
1	0	1	2
2	2	0	1

In generale vale il seguente

Teorema:

La tabella delle moltiplicazioni $\otimes$ di un semigruppo è un quadrato latino.

Osservazione: Dato che gli elementi dell'insieme possono essere scritti in ordine diverso nella tabella l'associazione tra il semigruppo e il quadrato latino non è unica: lo stesso semigruppo può dare origine a quadrati latini diversi; essi saranno però tutti isotopi tra loro.

Quadrati Greco-Latini

Definizione: Un **quadrato greco-latino** di ordine n è una sovrapposizione (intesa come prodotto cartesiano ordinato) di due quadrati latini di ordine n, formati da due insiemi diversi di simboli S1, S2, che soddisfa la seguente condizione:

1) ciascuna coppia ordinata di simboli compare una sola volta nel quadrato.

(ovvero ciascun simbolo del primo insieme deve essere accoppiato con ciascun simbolo del secondo insieme)

Se gli insiemi S1 e S2 sono formati da n simboli allora le coppie ordinate e distinte possibili sono $n \times n = n^2$.

Sono esempi di quadrati Greco-Latini:

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ

2,2	3,1	1,3
1,1	2,3	3,2
3,3	1,2	2,1

Curiosità Letteraria

Il romanzo *La vita: istruzioni per l'uso* di Georges Perec fa abbondante uso di quadrati greco-latini. In esso viene descritto un immobile parigino di 100 stanze disposte su 10 piani, come in una scacchiera quadrata di lato 10. Ogni capitolo è riservato alla narrazione di una singola stanza. Per scrivere il romanzo Perec, come spiega nel suo *Cahier des charges*, stila 42 liste di 10 elementi ciascuna, corrispondenti a vincoli narrativi (mobilio, persone, ecc), le divide in 21 coppie e attribuisce ad ognuna un quadrato greco-latino di lato 10, le cui caselle corrispondono alle stanze dell'immobile. Ogni stanza è quindi caratterizzata da 42 *vincoli narrativi*.

Definizione: Due quadrati latini che, sovrapposti, danno origine ad un quadrato Greco-Latino si dicono **ortogonali**.

Un'applicazione pratica: il problema delle casalinghe

Bisogna collaudare 5 modelli diversi di aspirapolvere per scoprire qual è il migliore. Si vuole che tutti gli aspirapolvere siano provati da 5 casalinghe, le quali daranno il loro giudizio su ciascuno di essi. Ciascun aspirapolvere sarà utilizzato da ciascuna casalinga per una settimana. E' possibile organizzare le prove in modo da avere i risultati nel giro di 5 settimane? Come?

Per risolvere il quesito basta ricondursi al problema equivalente di costruire un quadrato Greco-Latino di ordine 5. Identificheremo gli aspirapolvere con i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e le collaudatrici con le lettere A, B, C, D, E.

A questo punto costruiamo due quadrati latini ortogonali: quello degli aspirapolvere e quello delle casalinghe:

A	B	C	D	E
C	D	E	A	B
E	A	B	C	D
B	C	D	E	A
D	E	A	B	C

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Sovrapponendoli otterremo il seguente quadrato Greco-Latino:

A1	B2	C3	D4	E5
C2	D3	E4	A5	B1
E3	A4	B5	C1	D2
B4	C5	D1	E2	A3
D5	E1	A2	B3	C4

Che indica la possibile distribuzione nel corso delle 5 settimane (righe) degli aspirapolvere alle casalinghe.

Il Problema dei 36 Ufficiali

E' possibile disporre su una piazza quadrata 36 ufficiali, provenienti a 6 a 6 da 6 diversi reggimenti ed aventi, ciascuno di essi, sei gradi militari differenti, in 6 righe e 6 colonne da 6 ufficiali ciascuna, in modo che in ogni riga e in ogni colonna ci sia un ufficiale di ogni reggimento e ogni grado?

Il problema si può tradurre con: " E' possibile costruire un quadrato Greco-Latino di ordine 6?"

Eulero congetturò che tale problema fosse senza soluzione; tuttavia non riuscì a darne una dimostrazione formale.

“ *Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse.* «

Solo 120 anni dopo Eulero, nel 1900 il matematico francese Gaston Tarry dimostrò empiricamente l’irresolubilità del problema dei 36 ufficiali : dimostrò che degli 812 851 200 quadrati latini 6x6 non ne esistono di ortogonali.

Fu però smentita la congettura di Eulero affermante che tutti i quadrati Greco-Latini di ordine $n = 4k + 2$ sono impossibili. Nel 1959 i “guastafeste di Eulero”: Parker, Bose e Shrikhande dimostrarono che tale congettura si rivela falsa per ogni ordine $n = 4k + 2 > 6$.

Ad Eulero resta il merito di aver provato la risolubilità del problema nel caso in cui n sia dispari o divisibile per 4.

Nella figura i reggimenti sono rappresentati con colori diversi, mentre i ranghi sono rappresentati dai vari pezzi degli scacchi.

Il problema degli ufficiali si rivela risolubile nel caso in cui si debbano costruire quadrati Greco-Latini di ordine 5 o 7 (ovvero nel caso in cui si debbano disporre rispettivamente 25 o 49 ufficiali).

Quadrati latini di ordine 9, ovvero i Sudoku

Uno degli ultimi quadrati proposti da Eulero, a 76 anni, pochi mesi prima di morire, nel 1783, fu un diabolico quadrato di 81 caselle che potevano essere riempite in moltissimi modi diversi, con l'inserimento dei numeri da uno a nove, su ogni riga e su ogni colonna, senza ripetizioni.

E' proprio su un "semplice" quadrato latino di ordine 9 che si basa uno dei giochi più popolari degli ultimi anni, proposto al pubblico con il nome di Sudoku.

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
				7	8			9
8		7			9			
4				6		3		
						5		

Le regole sono molto semplici: si gioca su una tabella di nove per nove caselle in ognuna delle quali si deve inserire una cifra, da uno a nove. Ogni riga e ogni colonna deve contenere tutte le cifre da uno a nove, senza ripetizioni (le regole per giocare corrispondono alla definizione data di quadrato latino!!). Condizione ulteriore, e questa è la novità, anche ogni sottoquadrato di caselle tre per tre, contrassegnato da linee più marcate, deve contenere le nove cifre, senza ripetizioni.

La clausola del quadrato 9 x 9 diviso in blocchi 3 x 3, nei quali non ci siano ripetizioni dei nove numeri, oltre che rendere più accessibile la compilazione delle diaboliche 81 caselle, riduce notevolmente il numero dei quadrati latini possibili che passano da 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600 a 6.670.903.752.021.072.936.960. Tenendo conto che per risolvere un Sudoku ci vuole mediamente mezz'ora, riviste e giornali hanno quindi un rifornimento di Sudoku sufficiente per migliaia di anni.

Sitografia

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Quadrato_latino

[2] http://utenti.quipo.it/base5/combinatoria/qualat.htm

[3] http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Sudoku/sudoku.html

[4] http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/romagnoli/36ufficiali.pdf