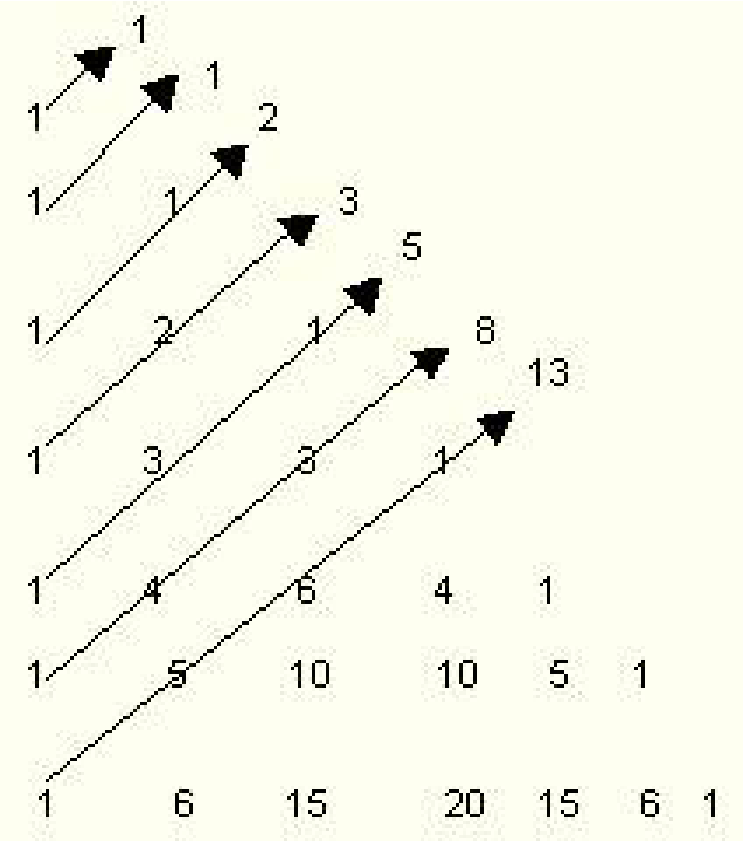
BREVE STORIA DELLA COMBINATORIA

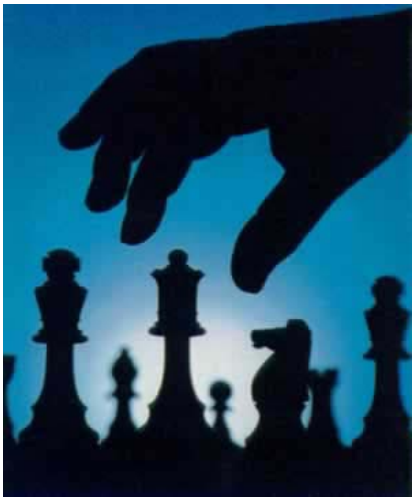


Tesina condotta
da
Fabrizio Zaccaron

Anno Accademico 2007/2008

INTRODUZIONE

Con il termine **combinatoria** si intende il settore della matematica che studia insiemi finiti di oggetti semplici (interi, stringhe, nodi e collegamenti, punti e linee, configurazioni discrete, insiemi finiti, ...) che soddisfano proprietà ben definite e tendenzialmente semplici.
Fin dall'antichità l'uomo è stato affascinato da questa disciplina che lo ha impegnato a studiare e risolvere problemi che, a differenza delle altre branche della matematica, sono applicati più diretta nel sociale; ad esempio, si pensi a tutte le possibili disposizioni di n persone attorno ad un tavolo, contare quanti gruppi di k persone (o animali oppure oggetti) passo formare da un insieme che ne contiene n.
Ma la principale fonte di problemi di tipo combinatorio sono dati dai passatempi dell'uomo, come i giochi di carte (poker e black jack fra tutti), gli scacchi, i quadrati latini, rompicapi che si sono evoluti a pari con lo studio e la conoscenza di questa disciplina.



Antichità

Nell'antichità la combinatoria sembra essere stata coltivata solo nelle civiltà orientali.

Presso gli Indù erano note ai tempi di **Bhaskara**, astronomo e matematico, intorno al 1150 le espressioni per i numeri delle permutazioni e delle combinazioni; forse erano note anche a **Brahamagupta** nel VI secolo.

In Cina nel I secolo vi sono documenti riguardanti lo studio dei **quadrati magici**, ovvero uno schieramento di numeri interi distinti in una tabella quadrata tale che la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero; tale intero è denominato la **costante di magia** o **costante magica** o **somma magica** del quadrato.

Non sembra giustificato sostenere che fosse noto fin dal 2200 a.C. il famoso

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

I quadrati magici vengono studiati ampiamente in Cina negli anni tra il 900 e il 1300. Essi sono studiati anche nel mondo islamico. In questi studi si hanno sempre toni mistici.

Essi e i quadrati latini giungono in Occidente attraverso il matematico bizantino **Moschopolous** intorno al 1315.

Un **quadrato latino** è una scacchiera quadrata di lato n con dei simboli su ogni casella, disposti in modo che ognuno compaia una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna. (Più formalmente, un quadrato latino può essere rappresentato come matrice $n \times n$ a coefficienti nell'insieme {1,2,...,n} dei primi n numeri naturali.)

A	B	C	D	E
B	C	E	A	D
C	E	D	B	A
D	A	B	E	C
E	D	A	C	B

Un altro oggetto studiato è quello che in Italia si chiama prevalentemente **<u>triangolo di Tartaglia</u>.**

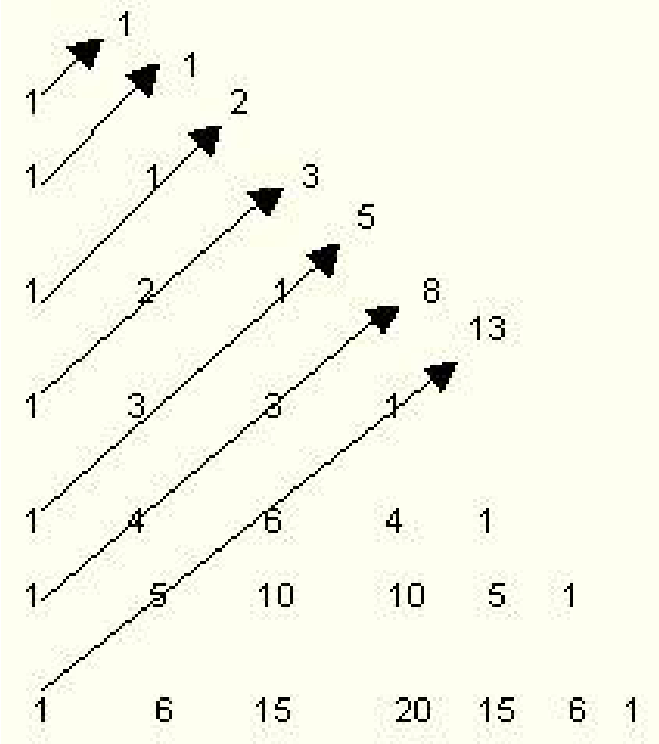
0								1								
1							1		1							
2						1		2		1						
3					1		3		3		1					
4				1		4		6		4		1				
5			1		5		10		10		5		1			
6		1		6		15		20		15		6		1		
7	1		7		21		35		35		21		7		1	
8	1	8		28		56		70		56		28		8		1

Noto agli indiani, si ritrova nel XIII secolo in **Giordano Nemorario** nell'opera del matematico arabo **Al Tusi** e nei testi cinesi intorno al <u>1300</u>; questi verosimilmente riprendono risultati ora perduti di **Chia Hsien** ottenuti intorno all'anno <u>1100</u>.

Al triangolo di Tartaglia si possono associare il **coefficiente binomiale** (si dimostra infatti che l'elemento di posizione k sulla riga n del triangolo di Tartaglia è il numero di combinazioni di *n-1* elementi di classe *k-1*)

$$C(n;k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

e i **numeri di Fibonacci,** una sequenza di <u>numeri interi naturali</u> definibile assegnando i valori dei due primi termini, $F_0 := 0$ ed $F_1 := 1$, e chiedendo che per ogni successivo sia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

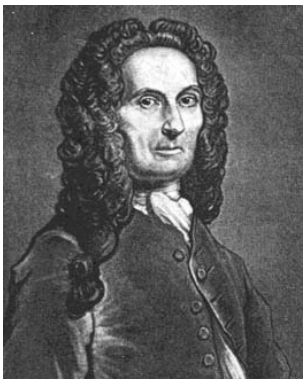


Secolo XVII

Pascal con il *Traité* del 1665 analizza il triangolo di Tartaglia, ora noto giustamente anche con il suo nome.

Leibniz con *Dissertatio de arte combinatoria* del 1666 (rifacendosi anche a Ramon Lull) propone di studiare questi argomenti, parla di partizioni di interi e di geometria della posizione.

Harriot, **Pascal** ed **Eulero** chiariscono lo stretto collegamento fra sviluppo formale e lista di configurazioni combinatorie (collegamento fra algebra e combinatoria).



De Moivre nel 1697 dimostra lo <u>sviluppo multinomiale</u>; inoltre scopre **il <u>principio di inclusione ed esclusione</u>** e con esso calcola il numero dei derangement.

Il **principio di inclusione ed esclusione** viene usato per denotare una formula che permette di esprimere la cardinalità di un insieme individuato come unione di insiemi finiti mediante le cardinalità di intersezioni di questi insiemi, cardinalità inferiori e quindi tendenzialmente più facili da determinare.

Denotiamo con |A| la cardinalità di un insieme A e consideriamo una famiglia finita di insiemi finiti : $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Per la cardinalità dell'unione di tale famiglia si ha

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

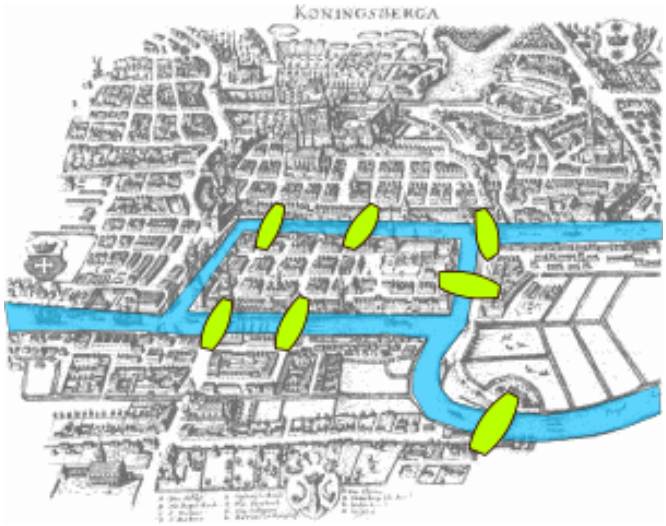
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots\cdots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_i\le n} \left| \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k} \right| \right)$$

Secolo XVIII

Ad **Eulero** si devono la nascita della teoria dei grafi con il **problema dei ponti di Kônigsberg**, lo studio delle partizioni con la relativa funzione generatrice e la loro connessione con le funzioni simmetriche e la posizione del problema dei **quadrati greco-latini**, una scacchiera quadrata di lato n con coppie di simboli su ogni casella, disposti in modo che ogni simbolo compaia una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna, e che ogni coppia compaia una e una sola volta.

Aα	Bδ	Cβ	Dε	Eγ
Bβ	Cε	Dγ	Eα	Aδ
Cγ	Dα	Eδ	Aβ	Bε
Dδ	Eβ	Aε	Bγ	Cα
Eε	Aγ	Bα	Cδ	Dβ



Nel 1736 Eulero risolse il **problema dei ponti di Kônigsberg.** La città di Königsberg, (ora Kaliningrad) è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. La questione è se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza. Eulero dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile a causa del numero dispari di nodi che congiungevano gli archi (ossia delle strade che congiungevano i ponti). La soluzione di Eulero diede origine alla teoria dei grafi, che si sarebbe poi evoluta dando origine alla topologia.

Inoltre Eulero introdusse la **funzione Gamma** così definita

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

tale che ponendo $z = n+1$ dove n appartiene ai numeri naturali si ha

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$$

Secolo XIX

Lagrange, Galois e Cauchy studiano i **gruppi di permutazioni**.

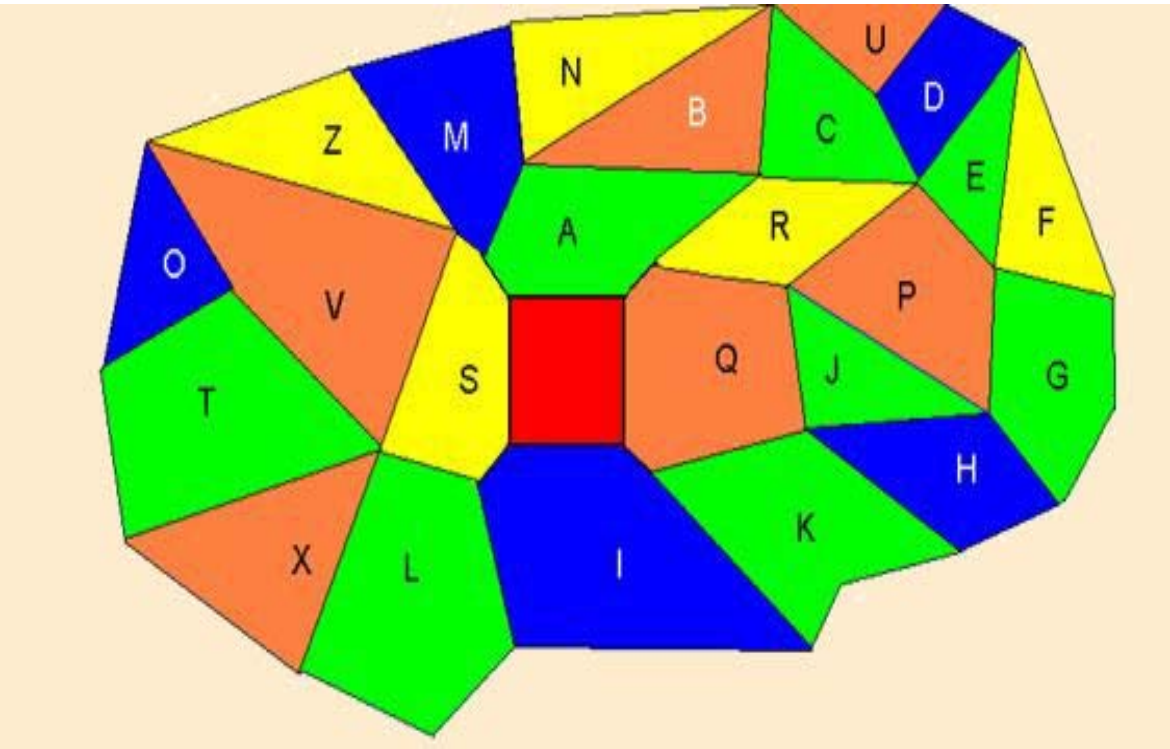
Calcolo di **Blissard** o calcolo umbrale.

Il permanente studiato da **Binet** e **Cauchy**.

Si studiano il **problema degli incontri** e il **problema dei ménages.**

Attraverso la matematica ricreativa si introducono altri problemi: il problema dei grafi hamiltoniani, il **problema dei 4 colori** posto da **Francis Guthrie**, le **triple di Steiner**.

Il **teorema dei quattro colori** è un teorema della matematica che afferma che data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Due regioni sono dette *adiacenti* se hanno almeno un segmento di confine in comune.



Inizio del XX secolo

La combinatoria accenna a raggiungere una certa autonomia dopo la pubblicazione del testo *Combinatory Analysis* di **Percy Alexander MacMahon** nel 1915. La sua importanza è cresciuta gradualmente negli anni successivi: sono da ricordare i testi di **König** sulla **teoria dei grafi** e di **Marshall Hall**.

Dopo gli anni ‘60

Lo sviluppo della combinatoria ha ricevuto impulso dall'opera di **Gian-Carlo Rota**, che a partire dagli anni 1960, ha contribuito alla fondazione di teorie unificatrici di ampia portata e di grande chiarezza formale.

Un'altra figura influente è stata quella di **Marcel Paul Schützenberger**.

Un'azione diversa, ma molto efficace, si deve a **Paul Erdős** e alla sua capacità di porre e risolvere problemi, i suoi contributi riguardando soprattutto problemi estremali.

Bibliografia

- Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson (1995): *The history of combinatorics*, pp. 2163-2198 in Ronald Graham, Martin Grötschel, Laszlo Lovasz *Handbook of combinatorics*, North Holland
- Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, Robin J. Wilson (1976): *Graph theory (1736-1936)*, Clarendon Press