

## I frattali di Mandelbrot.

I frattali sono uno dei rami più affascinanti della geometria; nati in tempi recenti, con l'avvento dei calcolatori, dalla fantasia di Mandelbrot, hanno i loro precursori in elucubrazioni teoriche, peraltro divertenti, di matematici quali Cantor, Hilbert, Kock, Sierpinski...

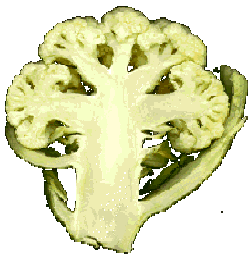


Il primo scritto di **Benoît Mandelbrot** sull'argomento:

"Les objets fractals: forme, hasard et dimension – Flammarion, Paris, 1975".  
(Esiste una traduzione italiana).

Questo libro si propone di dare una **interpretazione matematica** a fenomeni reali dominati dal caso e dal **caos**.

- *Forme*            ⇔    il concetto di autosomiglianza
- *Hasard*           ⇔    interpretazione matematica del caso e del caos
- *Dimension*      ⇔    un nuovo concetto di dimensione



Una delle loro caratteristiche peculiari è l'**autosomiglianza**: rimpicciolendo sempre più le loro parti, ciò che si ottiene mantiene le stesse caratteristiche geometriche dell'insieme di partenza.

I frattali sono quindi forme geometriche "autosomiglianti", che si ripetono indefinitivamente, a ogni scala di grandezza e a ogni singolo segmento di curva, e che svolgono il ruolo essenziale di supporto matematico nella modellizzazione dell'evoluzione caotica di un fenomeno.

Con i frattali nasce un concetto diverso, un ampliamento del concetto di **dimensione geometrica**: per esempio, come può una superficie non avere area ma averla una linea?

Nella geometria classica    Punto ⇔ 0,    linea ⇔ 1,    superficie ⇔ 2,    volume ⇔ 3

Mandelbrot coniò il termine "frattale" traendolo dal latino *fractus*, *frangere* cioè rompere, per denotare una vasta classe di modelli matematici i quali, pur essendo noti da molti anni, erano poco studiati e soprattutto poco applicati alla descrizione dei fenomeni della natura in quanto ritenuti "patologici" a causa della loro complessità o irregolarità.

Fu nel 1983 che il concetto di frattale acquisì vastissima notorietà presso i matematici, gli scienziati e il pubblico non specializzato, con la pubblicazione dell'opera pionieristica *The Fractal Geometry of Nature* dello stesso Mandelbrot.

Cominciamo dall'inizio. Quanto è lunga la costa della Bretagna?

Per Mandelbrot la dimensione della lunghezza di una costa, è

$$1 < \delta < 2.$$

Come si può misurare la lunghezza di un tratto di costa? Dice Mandelbrot:

"Ecco un primo metodo: si fa avanzare, lungo la costa, un compasso di apertura prefissata  $\eta$ , ogni passo del quale comincia dove finisce il precedente.

Il valore di  $\eta$ , moltiplicato per il numero di passi, darà una lunghezza approssimativa  $L(\eta)$ .

Se si ripete l'operazione, rendendo l'apertura del compasso sempre più piccola, "si vede che  $L(\eta)$  **tende ad aumentare senza limite**." (calma... le serie non sono tutte divergenti... dove mettiamo "Achille e la tartaruga"?... ma è solo per dare una idea...)

Si misurano scogli, poi sassi, e poi granelli di sabbia, molecole, ...

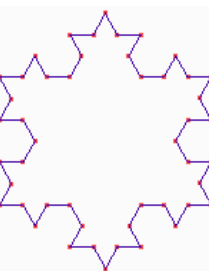
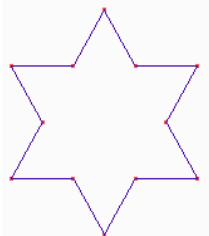
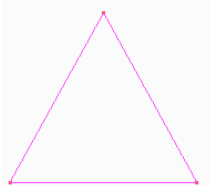
"una baia o una penisola, sotto-baie e sotto-penisole, sotto-sotto-baie e sotto-sotto-penisole... A meno della scala, lo stesso meccanismo ha potuto generare tanto i minuti dettagli quanto i caratteri globali delle coste".



Questa è Como... La linea nera è sicuramente meno precisa della rossa, ma anche la rossa si può migliorare...

Esempio: **Curva di Koch** o curva a fiocco di neve

(Helge von Koch 1870-1924), così costruita:



si parte da un triangolo equilatero

si sostituisce il terzo centrale di ogni lato con due lati di un triangolo equilatero (si hanno per ogni lato 4 segmenti uguali)

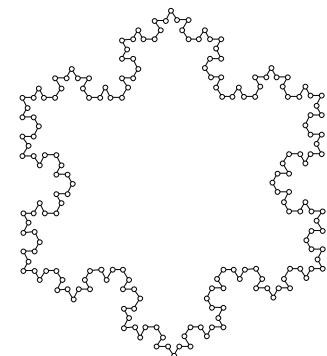
si sostituisce ciascuno di questi quattro segmenti con quattro sotto-segmenti della stessa forma.

Si continua sempre allo stesso modo...

Continuando così all'infinito si perviene ad una curva limite chiamata curva di Koch o **fiocco di neve**.

È vero che si tratta di una curva, di area nulla, e che contorna una superficie limitata, dal momento che è tutta contenuta in un cerchio, ma **ogni tappa della sua costruzione aumenta la lunghezza totale nel rapporto di 4/3**, quindi la curva di Koch ha una lunghezza infinita, proprio come una costa.

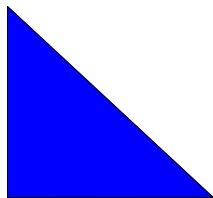
Essa è continua, ma al limite in tutti i suoi punti non ammette la retta tangente; è un "essere" geometrico vicino ad una funzione continua senza derivata.



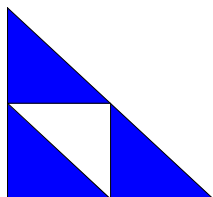
Nel libro “*Gli oggetti frattali – Forma, caso e dimensione*”, Mandelbrot afferma che per caratterizzare figure come queste, si può intanto osservare, in modo molto approssimativo, che una figura la cui dimensione si situa tra 1 e 2 deve essere più “affilata” di una superficie ordinaria, pur essendo più “corposa” di una linea ordinaria.

In particolare, se si tratta di una curva dovrebbe avere superficie nulla ma lunghezza infinita. Analogamente, se la sua dimensione è compresa fra 2 e 3, dovrebbe avere un volume nullo.

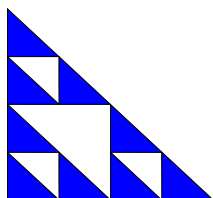
Un altro esempio: **il triangolo di Sierpinski**.



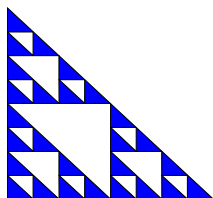
si inizia, per esempio, da un triangolo isoscele e rettangolo



si congiungono i punti medi dei lati e si toglie il triangolo isoscele e rettangolo centrale

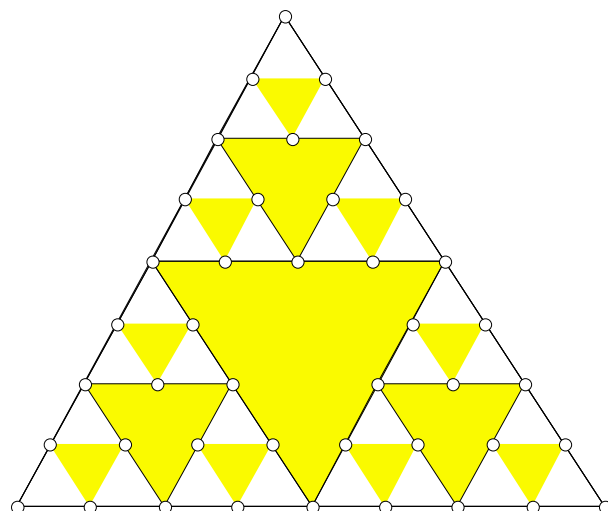


si procede sui triangoli rimanenti togliendo ogni volta il triangolo isoscele e rettangolo ottenuto congiungendo i punti medi dei lati

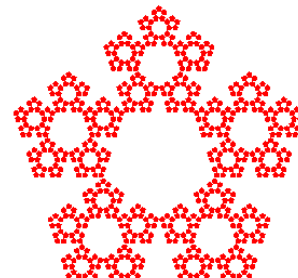
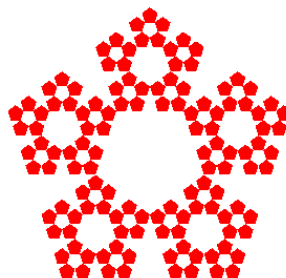
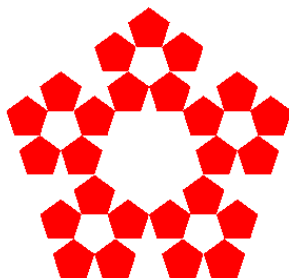
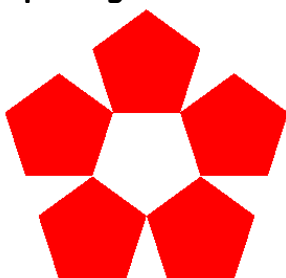


si continua sempre allo stesso modo

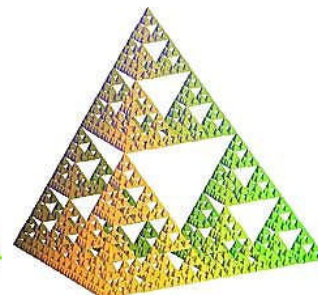
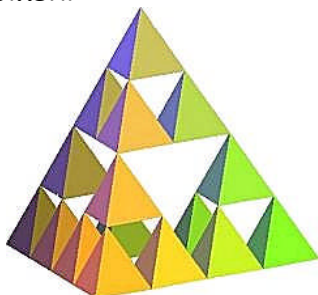
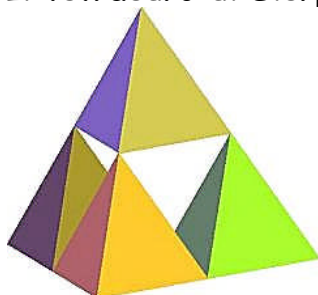
La figura che si ottiene ha area che è sempre  $\frac{3}{4}$  dell'area precedente. A fianco la stessa costruzione, partendo da un triangolo equilatero.



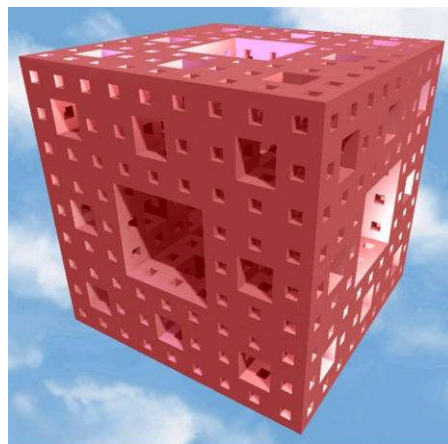
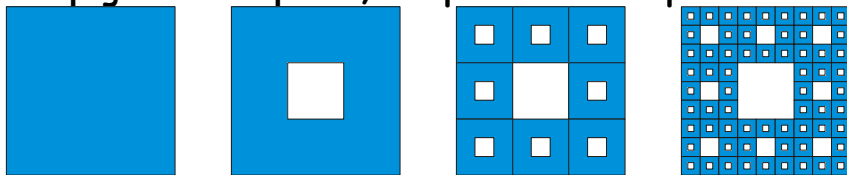
### I pentagoni di Sierpinski



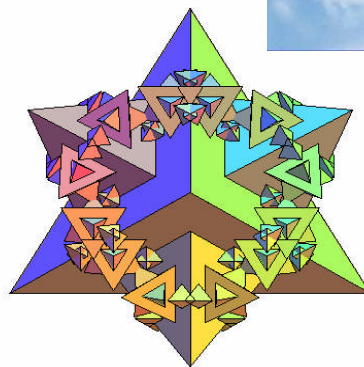
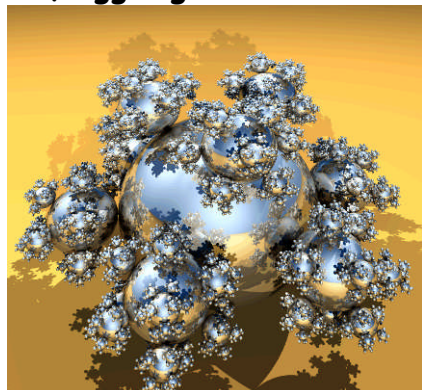
### Il tetraedro di Sierpinski



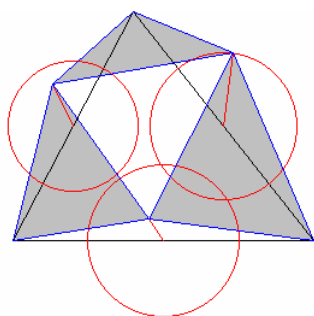
### La spugna di Sierpinski, nel piano e nello spazio



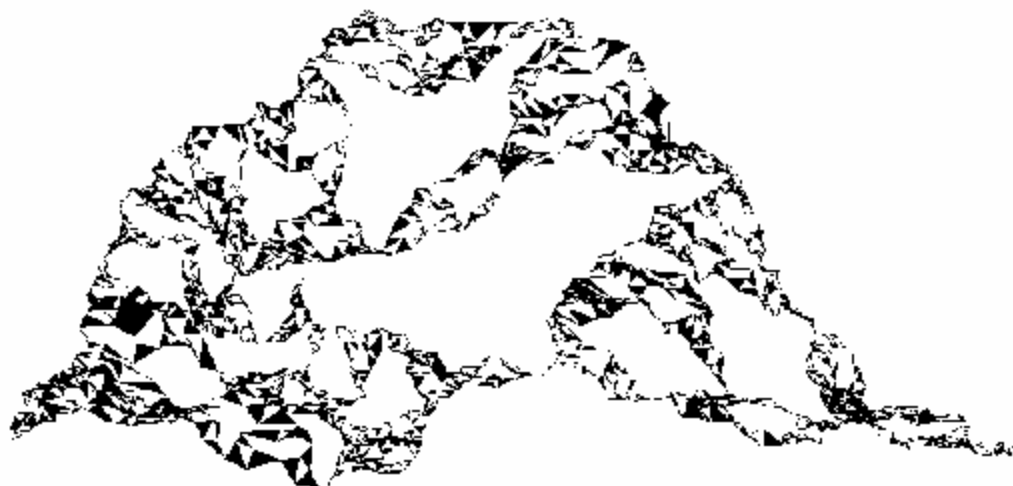
E ancora, aggiungendo invece che togliendo:



Come disegnare montagne dal triangolo di Sierpinski



Livello 4: 81 triangoli  
Livello 7: 2187 triangoli



## Dimensione di omotetia

Consideriamo una figura  $D$ -dimensionale e dividiamo ogni sua “dimensione” in  $N$  parti uguali, di cui ciascuna è  $\frac{1}{N}$  dell'intero.  $N$  è detto **fattore di scala**.

Il rapporto di similitudine  $r$  tra l'intera figura e una singola parte sarà dato da  $r = \sqrt[D]{N}$

Esempi:

- un segmento ( $D=1$ ) è diviso in  $N$  segmenti di lunghezza  $\frac{1}{N}$ ,
- un quadrato ( $D=2$ ) in  $N^2$  quadrati di lato  $\frac{1}{N}$ ,
- un cubo ( $D=3$ ) in  $N^3$  cubetti di lato  $\frac{1}{N}$ ;

come è ovvio si hanno per una figura  $D$ -dimensionale,  $N^D$  parti.

Poiché risulta  $\log(a^b) = b \log a$ , possiamo scrivere

$$\log(\text{numero dei pezzi}) = D \log(\text{fattore di scala})$$

Definiamo **dimensione frattale**

$$D = \frac{\log(\text{numero dei pezzi})}{\log(\text{fattore di scala})}$$

- per il segmento  $D = \log(N)/\log(N)=1$
- per il quadrato  $D = \log(N^2)/\log(N)=2$   $\log(N)/\log(N)=2$
- per il cubo  $D = \log(N^3)/\log(N)=3$   $\log(N)/\log(N)=3$
- per la curva di Koch ad ogni iterazione si ottengono 4 pezzi di dimensione  $1/3$  dunque  $D = \log(4)/\log(3) \approx 1.26 \Rightarrow 1 < D < 2$
- per il triangolo di Sierpinski ad ogni iterazione si ottengono 3 pezzi di lato  $1/2$  dunque,  $D = \log(3)/\log(2) \approx 1.58 \Rightarrow 1 < D < 2$
- .....

Si potrebbe pensare la curva di Koch unidimensionale, ma questo non è vero: per quanto ciascuna delle iterazioni che approssimano la curva sia unidimensionale, la curva limite non lo è.

Allo stesso modo si potrebbe pensare il triangolo di Sierpinski bidimensionale, ma non è vero, ad ogni iterazione la sua area diminuisce di un quarto; al limite ha area nulla.

Caratteristica basilare di entrambe le figure è l'*autosomiglianza*: le parti, in scala ridotta, sono simili alla figura originaria.

Esistono altre, più complesse, definizioni di dimensione frattale, che si trovano con facilità in letteratura.

### Un altro esempio: la polvere frattale di Cantor

- Si inizia da un segmento
- si divide in tre parti il segmento e si toglie la parte centrale.
- Si itera la costruzione su ogni segmento...

Figura ottenuta:

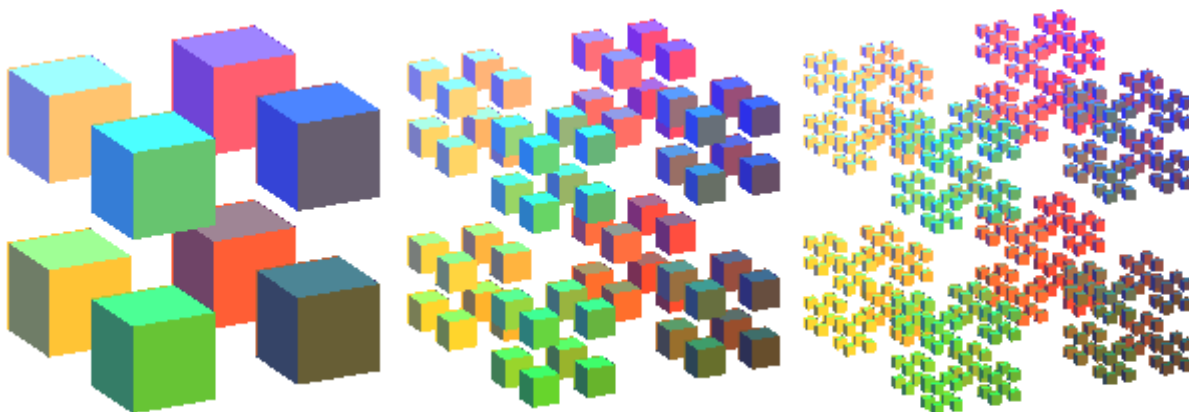


La sua dimensione di omotetia è  $D = \log(2)/\log(3) \approx 0.63$ .

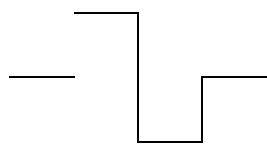
### Il pettine di Cantor



### Nello spazio: i cubi di Cantor



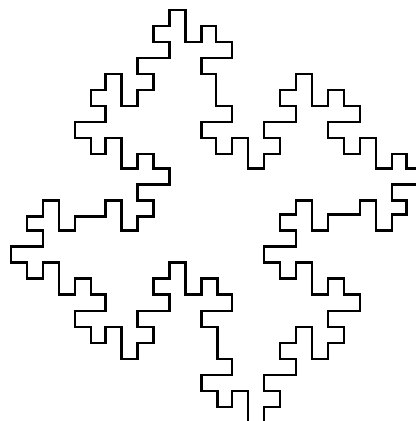
### Altri esempi: l'isola di Koch



Nella figura a sinistra si vede come viene mutato un lato di un quadrato per ottenere la figura disegnata a destra.

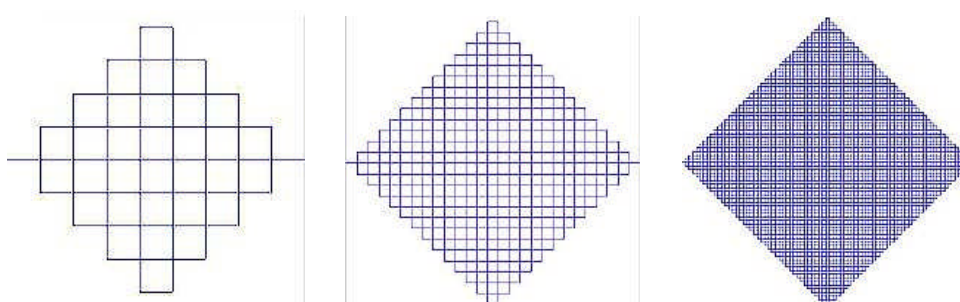
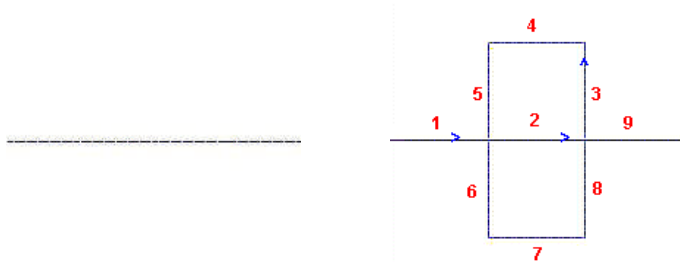
Da ogni lato si ottengono 8 pezzi di misura  $\frac{1}{4}$  del segmento originale, quindi la dimensione è:

$$D = \log(8)/\log(4) = 1,5$$

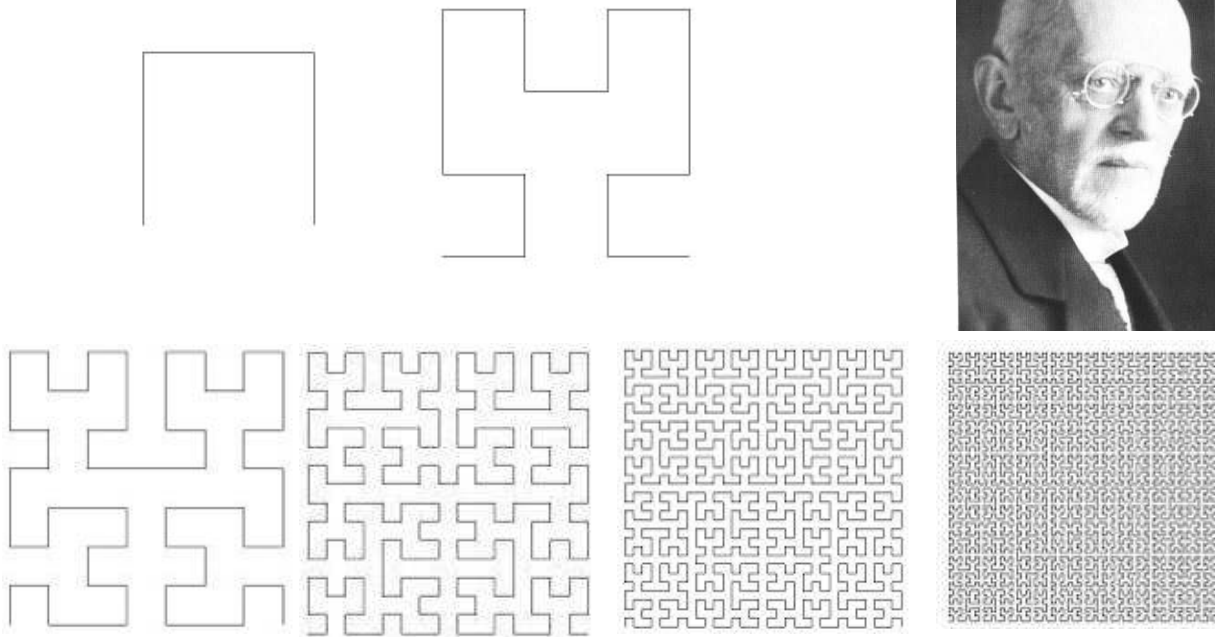


### Curve che riempiono un quadrato: La curva di Peano

La seguente figura riproduce la curva di Peano. L'esempio di Peano originò molti studi sul concetto di dimensione, che diedero origine a varie altre definizioni di "dimensione frattale".



## E la curva di Hilbert



## Gli strani attrattori del caos

Consideriamo una particella confinata in una determinata zona dello spazio, la quale sia soggetta a certe leggi deterministiche. Seguendone l'evoluzione, probabilmente noteremo che essa tenderà ad assestarsi in corrispondenza di uno fra tre comportamenti possibili la cui descrizione geometrica è chiamata **attrattore**:

- La particella può essere attratta verso una **posizione di riposo** finale (come un pendolo che si ferma poco a poco); in questo caso l'attrattore è un punto.
- La particella può stabilizzarsi in un **ciclo periodico** (come i pianeti nelle loro orbite attorno al sole). In questo caso l'attrattore è un'ellisse e il moto successivo può essere previsto con notevole precisione.
- L'ultima possibilità è che la particella **continui a vagare**, muovendosi in modo erratico, pur rimanendo confinata in una certa regione dello spazio. Il moto di alcuni asteroidi rappresenta molto bene questo fenomeno.

Quest'ultima possibilità è quella che ha le caratteristiche più interessanti. Si osserva infatti che modestissimi errori nella misura della posizione e della velocità dell'asteroide portano a errori enormi nelle previsioni del suo cammino futuro. Questo è il segnale del caos, e le regioni dello spazio individuate da questo moto sono dette **attrattori strani**.

Quando una particella subisce l'influenza dell'attrattore strano, qualunque sia il punto di partenza nelle vicinanze dell'attrattore, la particella si muoverà, mediamente, sempre allo stesso modo, indipendentemente dal punto di partenza. Il moto è determinato da leggi precise, ma la particella si comporta a tutti gli effetti come se si muovesse a caso.

Gli attrattori strani sono molto spesso dei frattali.

Alla base del concetto base di attrattore sta il concetto di iterazione che consiste nel valutare il comportamento della sequenza di valori  $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))) \dots$  dove  $f$  è una certa funzione a cui siamo interessati.

Il valore iniziale di  $x$  viene chiamato **seme**.

Le funzioni che possono mostrare, se ripetutamente iterate, un interessante comportamento ciclico o quasi ciclico sono le funzioni *non monotone*.

La parabola rappresenta sicuramente la curva più semplice del tipo detto; consideriamo per esempio la parabola di equazione  $y = 4\lambda x(1 - x)$ ,  $\lambda \leq 1$ , che interseca l'asse  $x$  nei punti di ascissa 0 e 1.

Ammettiamo dunque in entrata come valori di  $x$  tra 0 e 1.

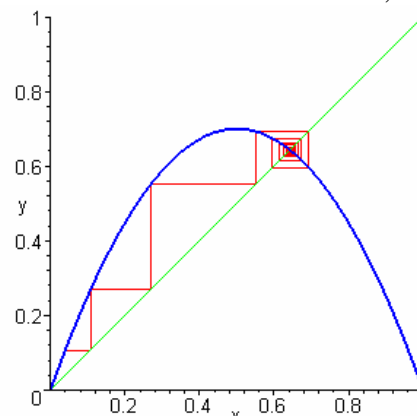
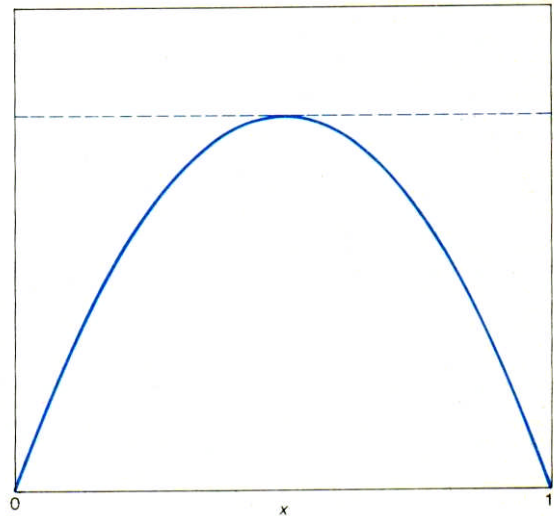
Per ogni  $x$  nell'intervallo  $[0,1]$  la  $y$  è sempre compresa tra 0 e  $\lambda$ .

Il valore di  $f(x)$ , quindi, può essere sempre riutilizzato come valore da dare ad  $x$  nella funzione, ciò ci assicura che l'iterazione sarà sempre possibile.

A seconda dell'ordinata del vertice della parabola, cioè  $\lambda$ , la funzione descrive un'incredibile varietà di "orbite", cioè di sequenze  $x, f(x), f(f(x))\dots$

In particolare, per  $\lambda$  al di sotto del valore critico ( $\lambda_c = 0,892486\dots$ ) le orbite sono tutte regolari, ma per  $\lambda$  pari o superiore a questo valore critico, una sequenza di valori essenzialmente caotici verrà tracciata dai valori  $x, f(x), f(f(x)), \dots$ , qualsiasi sia il seme positivo scelto.

Per capire come funzioni questa dipendenza dalla posizione del vertice  $\lambda$  bisogna visualizzare il processo di iterazione  $f(x)$ . Supponiamo che il valore di  $\lambda$  sia 0,7.



Consideriamo il grafico di  $f(x)$ , insieme alla retta verde di equazione  $y = x$ .

Consideriamo i due valori di  $x$  in cui si intersecano la retta di equazione  $y = x$  e la curva: essi sono

$$x = 0 \text{ e } x = x.$$

Allora, per costruzione,  $f(x)$  è uguale a  $x$  e la ripetuta iterazione di  $f$  a questo valore  $x$  porterà a un ciclo infinito.

Lo stesso avviene se si inizia l'iterazione dal valore  $x = 0$ : si rimane in un ciclo senza fine.

C'è però una differenza significativa tra questi due "punti fissi" di  $f$  e la cosa è più evidente se si prende qualche altro valore iniziale di  $x$ , ad esempio  $x = 0,04$  come si vede nella figura.

Chiamiamo  $x_0$  questo valore iniziale di  $x$ . Per generare l'orbita con punto iniziale  $x_0$  procediamo come da figura: una retta verticale di equazione  $x = x_0$  incontra la curva all'altezza  $y_0 = f(x_0)$ .

Nel generare la figura, per iterare  $f$  si è usata la retta  $y = x$ : rimanendo all'altezza  $y_0$ , ci spostiamo orizzontalmente fino a raggiungere la bisettrice, dato che lungo questa retta  $y$  è uguale a  $x$ , sia  $x$  sia  $y$  sono uguali a  $y_0$ . Chiamiamo  $x_1$  questo nuovo valore di  $x$ .

Tracciamo ora una seconda retta verticale, la quale incontrerà la curva all'altezza  $y_1 = f(x_1) = f(y_0) = f(f(x_0))$ . Quindi si ripete il procedimento.

Notiamo che a poco a poco ci si avvicina sempre di più a  $x$ , che è quindi un punto fisso che *attrae* i valori iterati di  $f(x)$ . È questo l'esempio più semplice di attrattore.



Ogni possibile punto iniziale (tranne 0) è trascinato, mediante l'iterazione di  $f$ , a questo valore stabile di  $x$ .

Per questa ragione  $x$  è chiamato **punto fisso stabile**.

Al contrario, 0 è un **punto fisso repulsivo** o non stabile, dato che l'orbita di qualsiasi valore iniziale di  $x$ , per quanto vicino a 0, si allontanerà da 0 per muovere verso  $x$ .

La ragione di questa differenza tra i due punti fissi sta nel fatto che in 0 la retta tangente è inclinata di un angolo superiore a 45 gradi ed è l'inclinazione locale della curva a determinare di quanto ci si deve muovere orizzontalmente ogni volta che si itera  $f$ .

In  $x$  invece la tangente è inclinata di un angolo minore di 45 gradi, questo succede ad esempio per  $\lambda = 0,7$ .

Il comportamento caotico, **a omotetia interna**, della curva di Koch o del triangolo di Sierpinski può essere riprodotto da una **funzione matematica** analiticamente definita.

Il caos non è solo un aspetto della natura, che la matematica tenta di riportare a modelli ragionevoli e razionali, ma risiede nella stessa esattezza matematica!

## Il frattale di Mandelbrot

Vediamo diffusamente la funzione che dà origine alla famosa figura di Mandelbrot.

Si consideri il piano cartesiano, in cui ogni punto  $P^\circ$   $(a,b)$  è in corrispondenza biunivoca con il numero complesso

$$w = a + ib.$$

Per ogni punto di questo piano, cioè per ogni numero complesso  $w = a + ib$ , possiamo costruire la successione di numeri complessi (e quindi di punti) così definita in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} z_1 = w \\ z_{n+1} = z_n^2 + w \end{cases}$$

Fissato arbitrariamente un punto  $P_1 \rightarrow z_1$  del piano, si ottiene quindi un percorso

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow \dots$$

esempi: (le coordinate sono approssimate)

$$A_1 \equiv (1,1) \rightarrow A_2 \equiv (1,3) \rightarrow A_3 \equiv (-7,7) \rightarrow A_4 \equiv (1,-97) \rightarrow A_5 \equiv (-9407,-193) \text{ @ } \dots;$$

$$B_1 \equiv (0.5,0.5) \rightarrow B_2 \equiv (0.5,1) \rightarrow B_3 \equiv (-0.25,1.5) \rightarrow B_4 \equiv (-1.69,-0.25) \rightarrow B_5 \equiv (3.29,1.34) \rightarrow B_6 \equiv (9.49,9.33) \dots;$$

$$C_1 \equiv (-1.5,0.1) \rightarrow C_2 \equiv (0.74,-0.20) \rightarrow C_3 \equiv (-0.99,-0.20) \rightarrow C_4 \equiv (-0.55,0.49) \rightarrow C_5 \equiv (-1.43,-0.44) \rightarrow C_6 \equiv (0.36,1.36) \rightarrow C_7 \equiv (-3.23,1.08) \rightarrow C_8 \equiv (7.80,-6.87) \rightarrow \dots;$$

$$D_1 \equiv (-0.5,0.5) \rightarrow D_2 \equiv (-0.5,0) \rightarrow D_3 \equiv (-0.25,0.5) \rightarrow D_4 \equiv (-0.69,0.25) \rightarrow D_5 \equiv (-0.09,0.16) \rightarrow \dots \rightarrow$$

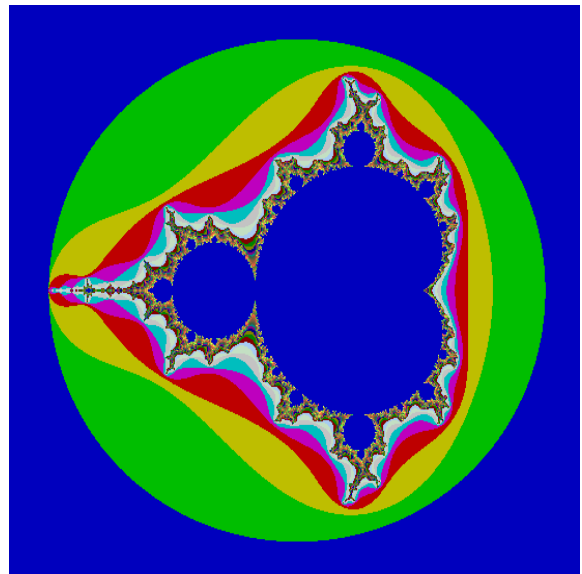
$$D_{10} \equiv (0.12,0.22) \rightarrow \dots \rightarrow D_{20} \equiv (-0.17,0.31) \rightarrow \dots \rightarrow D_{50} \equiv (-0.36,0.40) \rightarrow \dots \rightarrow D_{100} \equiv (-0.47,0.29) \rightarrow \dots \rightarrow D_{1000} \equiv (-0.41,0.28) \rightarrow \dots$$

Alcuni punti si allontanano rapidamente dall'origine, altri si allontanano dopo un certo numero di iterazioni, altri ancora danno luogo a un percorso che resta, per quanti termini della successione si calcolino, sempre vicino all'origine.

Si può dimostrare che se un punto è **fuori dal cerchio critico** di centro l'origine e raggio 2, allora i successivi punti si allontaneranno sempre più dall'origine.

Se un punto invece è **interno** a tale cerchio critico, **non è possibile prevedere** se il percorso porta fuori da questo cerchio dopo 1 iterazione, dopo 2, oppure dopo 10, dopo 100 iterazioni, oppure se non esce mai.

La figura di Mandelbrot è la rappresentazione grafica di quanto esposto:



- ad ogni punto  $P$  del piano si associa il numero  $n$  di iterazioni necessarie a trovare il primo punto che sia esterno al cerchio di centro  $O$  e raggio 2.
- Ai punti i cui percorsi non escono mai dal cerchio è associato il numero  $n = 0$ .
- Ai punti esterni al cerchio è associato il numero  $n = 1$ .

Se si associa ad ogni intero  $n$  un colore diverso, ad ogni punto del piano corrisponde un colore. Saranno colorati **con lo stesso colore** tutti quei punti il cui percorso secondo la successione di Mandelbrot esce dal cerchio critico dopo **uno stesso numero  $n$  di iterazioni**.

La regione esterna al cerchio sarà colorata con il colore 1, mentre ai punti che danno origine a percorsi che non escono mai dal cerchio critico compete il colore 0.

Per costruire effettivamente questa figura ci serviamo del calcolatore:

dividiamo il piano in una matrice di pixel e calcolare per ciascun punto il valore di  $n$ , e infine accendere il pixel corrispondente con il colore  $n$  (a seconda del numero  $k$  di colori della risoluzione grafica usata useremo la funzione  $\text{mod } k$ ,  $\text{mod } 15$  nel caso della figura precedente, che era a 16 colori)

Esempio:

figura di Mandelbrot relativa al quadrato  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  in una finestra di  $200 \times 200$  pixel.

Si possono esaminare i  $200 \times 200$  punti di coordinate

$$x = \frac{4}{200}i, y = \frac{4}{200}j \quad \text{con } i=0, 1, \dots, 199, \text{ e } j=0, 1, 2, \dots, 199.$$

Per ciascuno di questi punti si costruisce la successione di Mandelbrot.

Posto  $P = P_1 \equiv (a, b) \equiv a + ib$ ,  $P_2 = (a + ib)^2 + a + ib \Leftrightarrow P_2 \equiv (a^2 - b^2 + a, 2ab + b)$  e così via.

Di ogni nuovo punto si calcola la sua distanza dall'origine, calcolando il modulo del corrispondente numero complesso; se questo, per l'elemento  $n$ -esimo della successione è maggiore di 2, allora si interrompe il calcolo della successione e si accende il pixel relativo al punto  $P$  con il colore  $n$ .

Ovviamente il calcolatore dispone di un numero finito di colori, se per esempio dispone di 15 colori più lo sfondo indicati con i numeri 0, 1, 2, 3, ... , 15 dove lo zero è il colore dello sfondo, allora il punto  $P$  verrà acceso con il colore

$$(n \bmod 15) + 1.$$

Se  $P$  genera un percorso che non esce mai dal cerchio critico, occorre fissare un massimo agli elementi della successione che vengono calcolati, per esempio 50: se il cinquantesimo punto della successione generata da  $P$  è ancora interno al cerchio di raggio 2 allora al punto  $P$  viene attribuito il colore 0.

Il triangolo di Sierpinski è dato dalla seguente funzione, definita sul campo complesso in cui ogni punto  $P \equiv (x, y)$  è in corrispondenza con il numero complesso  $z = x + iy$ .

$$z_{n+1} = \begin{cases} (x_n, 2y_n - 1) & , \text{ se } y_n > 0.5 \\ (2x_n - 1, y_n) & , \text{ se } x_n > 0.5 \\ (2x_n, 2y_n) & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

## I sistemi di rewriting per la generazione di frattali.

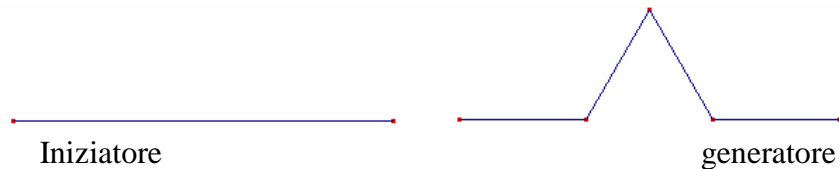
Molti dei frattali visti sono ottenuti con procedimenti iterativi considerando due oggetti:

un **iniziatore**

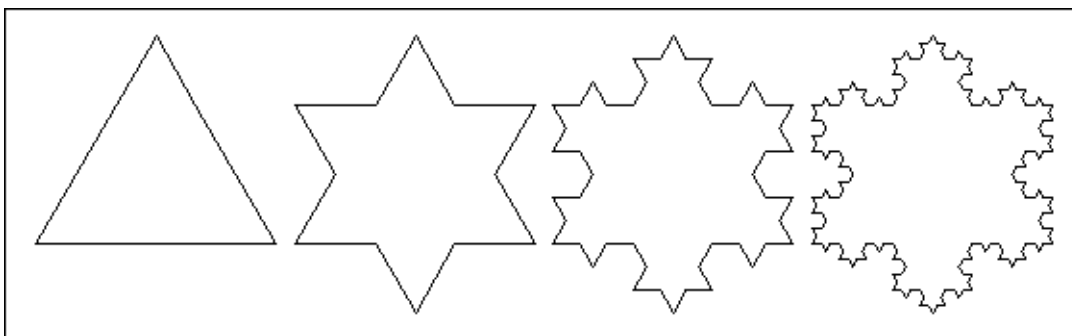
un **costruttore**

ogni stato della costruzione si ottiene rimpiazzando ogni porzione dell'iniziatore con il generatore.

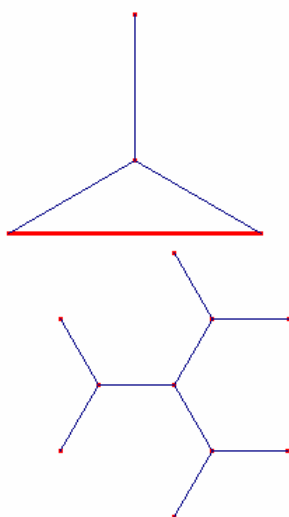
Esempio. Nella curva di Kock:



Ogni segmento è sostituito dal generatore anche per le successive iterazioni.



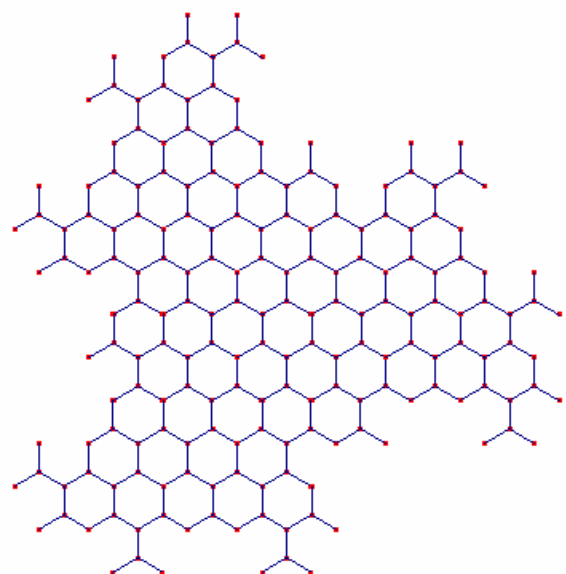
Con lo stesso metodo ma con generatore diverso si ottiene una curva completamente diversa: dato un segmento (rosso, iniziatore) si costruisce il triangolo equilatero che ha tale segmento come lato, se ne trova il centro e si congiunge tale centro con i tre vertici, ottenendo il generatore.



segmento rosso: iniziatore  
tre segmenti blu: generatore

prima iterazione

Con qualche altra iterazione si ottiene la figura sotto. Si intuisce che, al limite, questa curva riempie il piano, le cellette saranno infatti sempre più piccole.



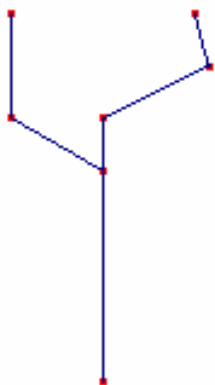
E questo è un altro esempio del fatto che il concetto di curva va un po' ripensato: una curva non dovrebbe avere un'area (e qui non si parla di area interna, ma proprio di area della curva.....)

Ecco una pianta frattale:

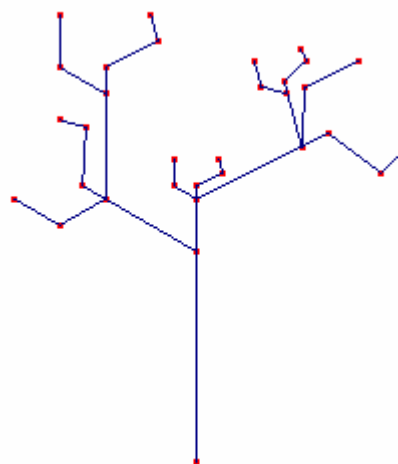
Iniziatore



generatore

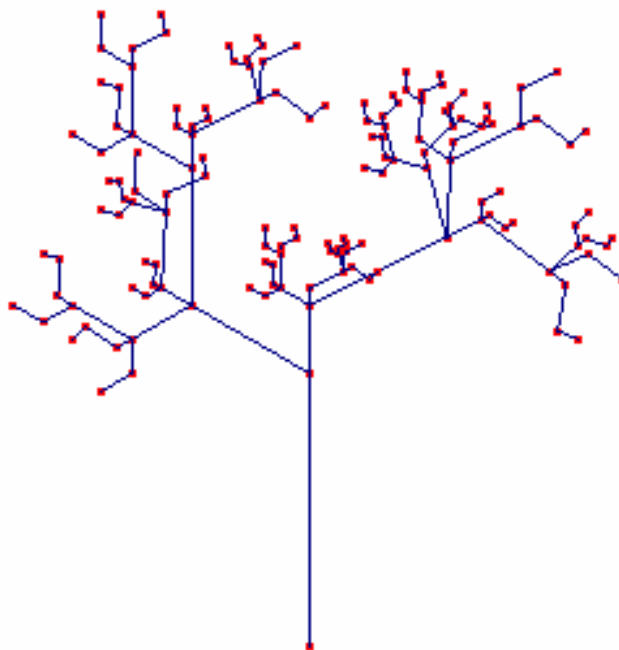


secondo passo

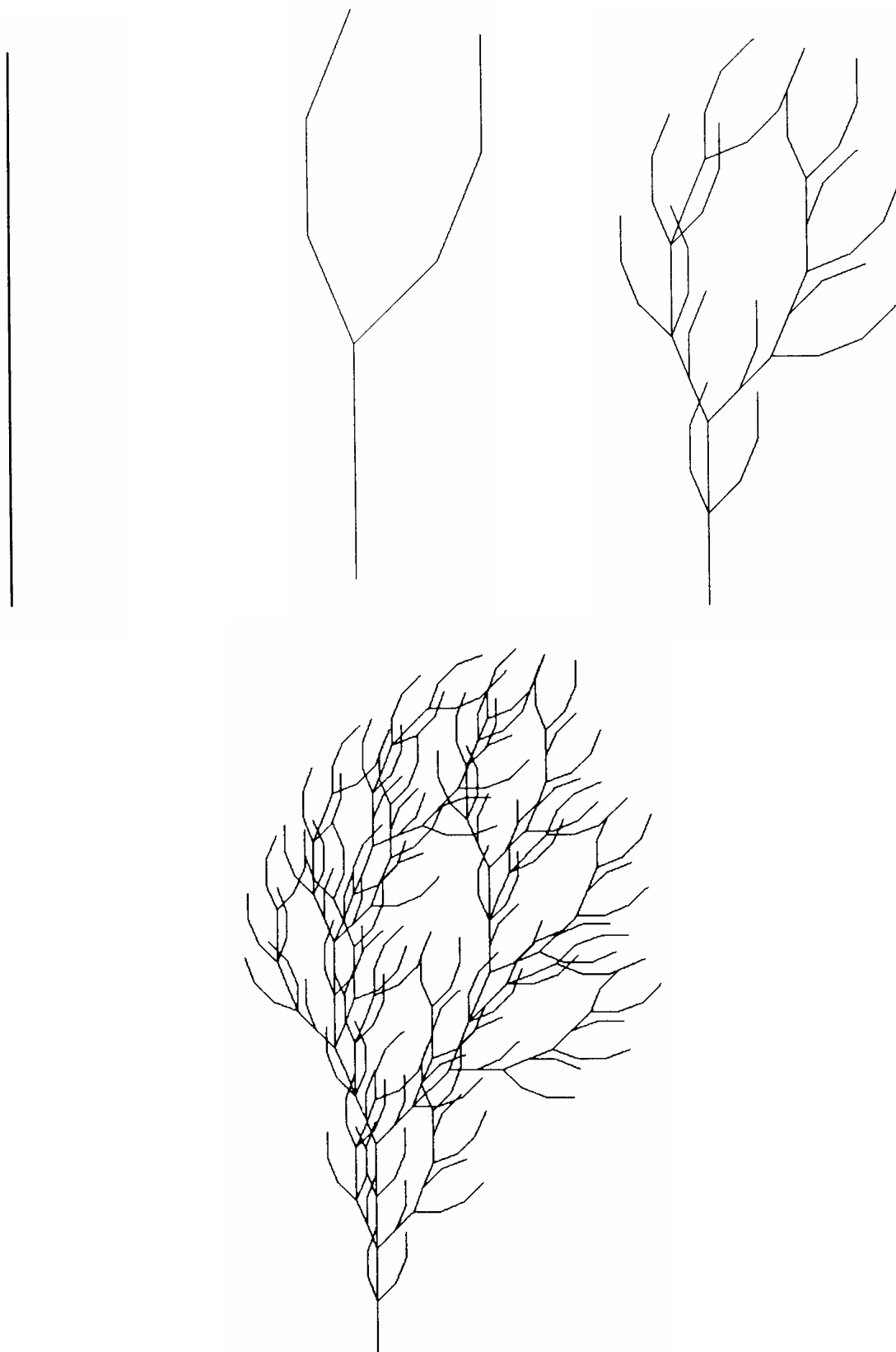


E

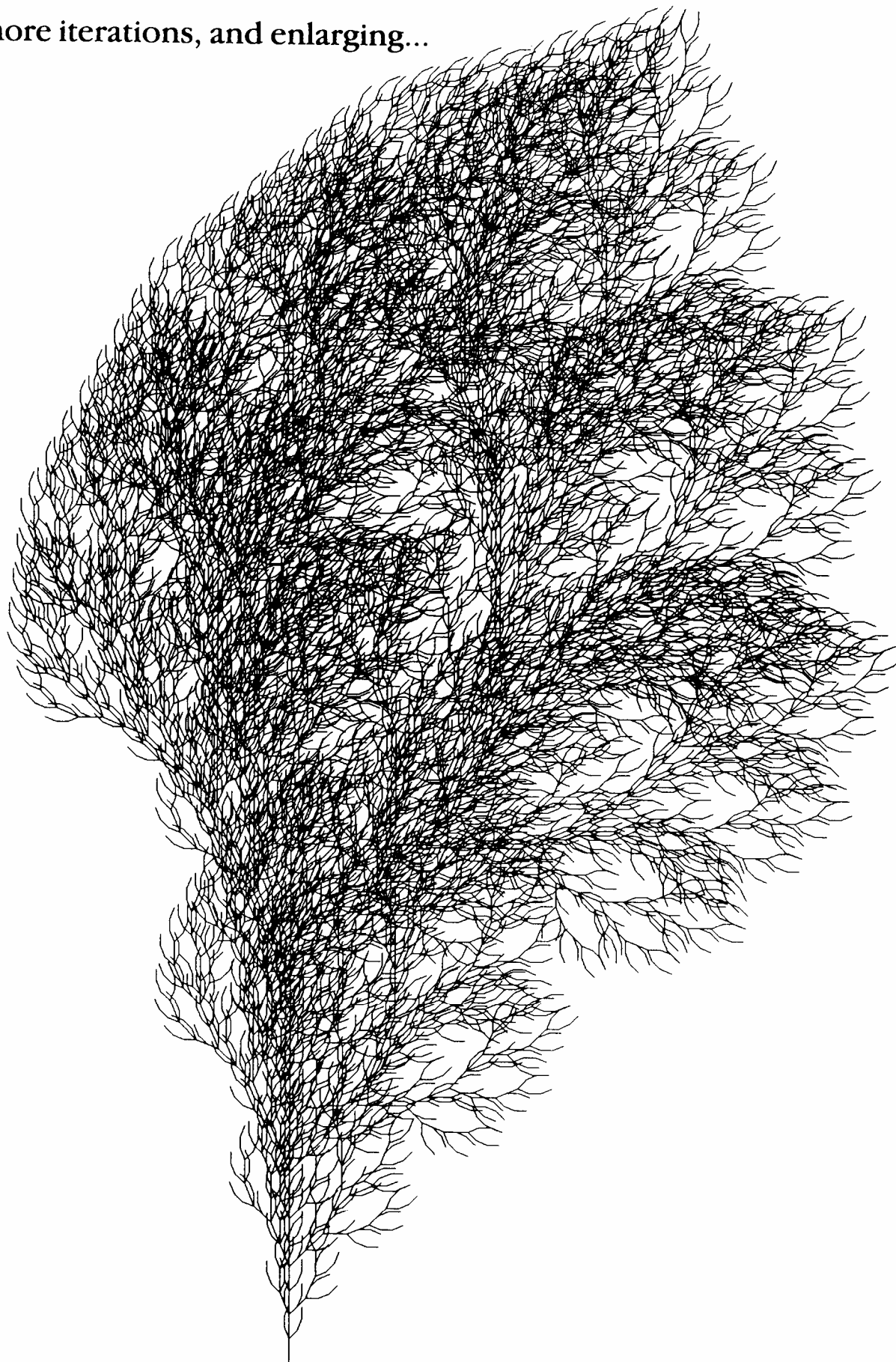
ancora un passo, ingrandito.



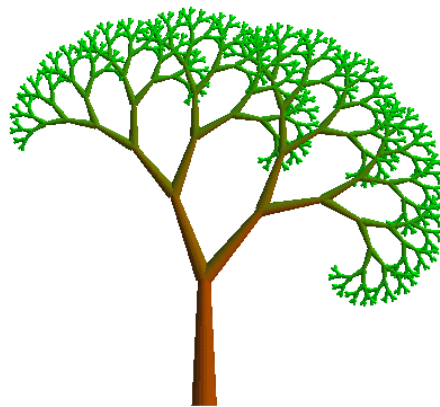
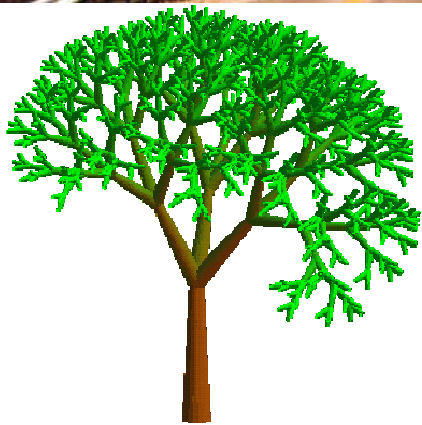
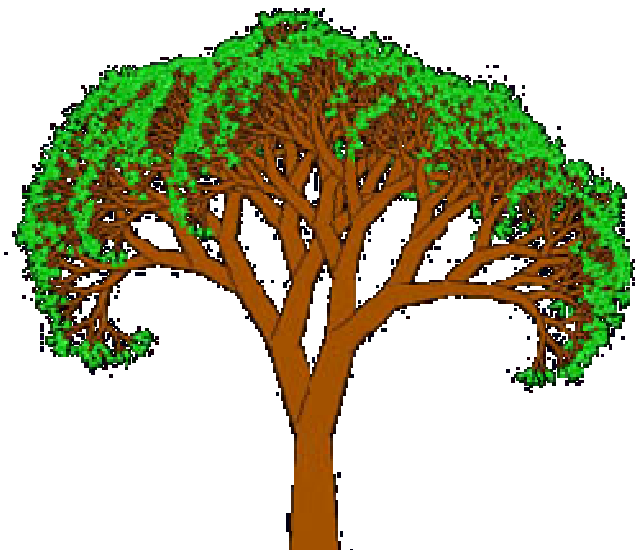
Ecco un altro esempio:



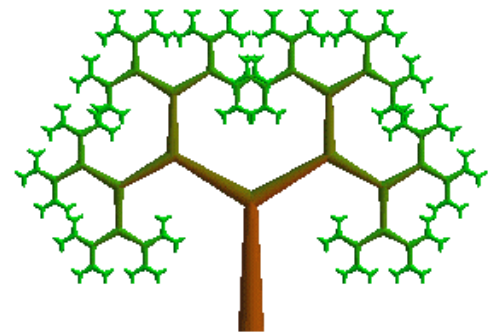
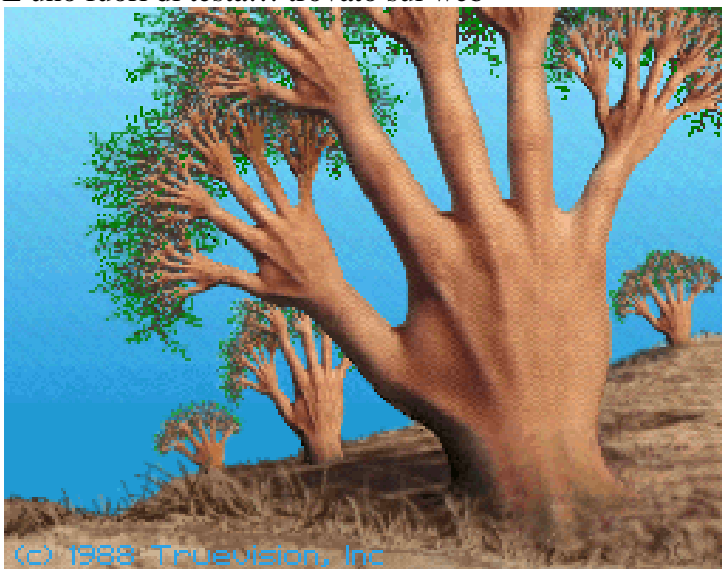
two more iterations, and enlarging...



Un albero vero... gli altri frattali

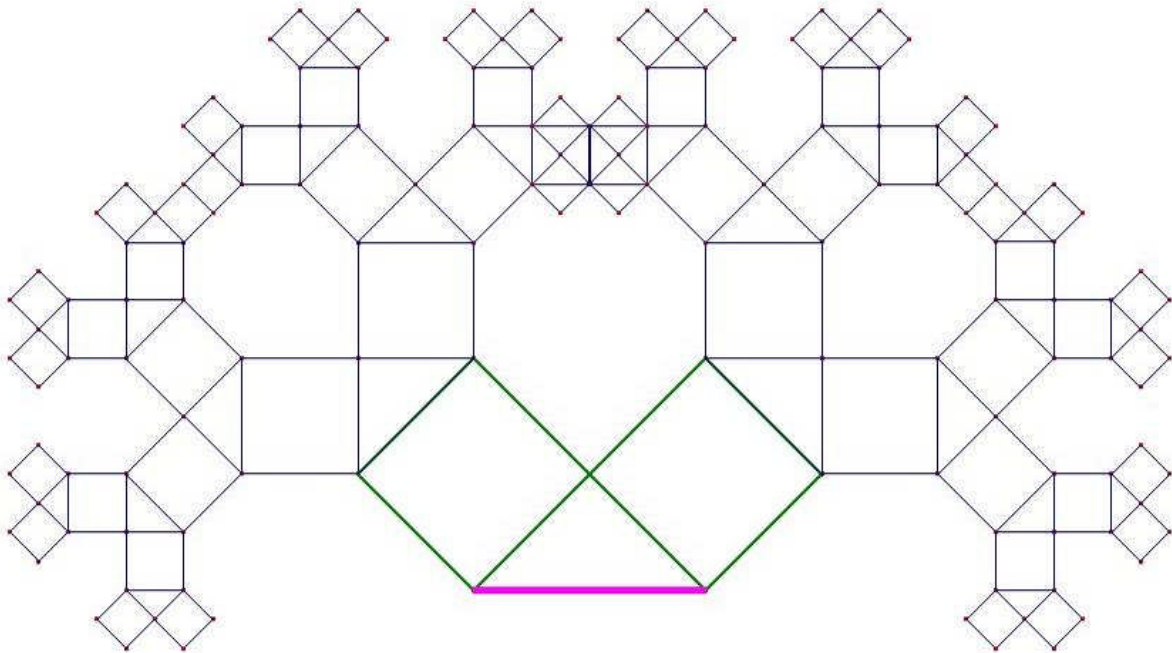


E uno fuori di testa... trovato sul web



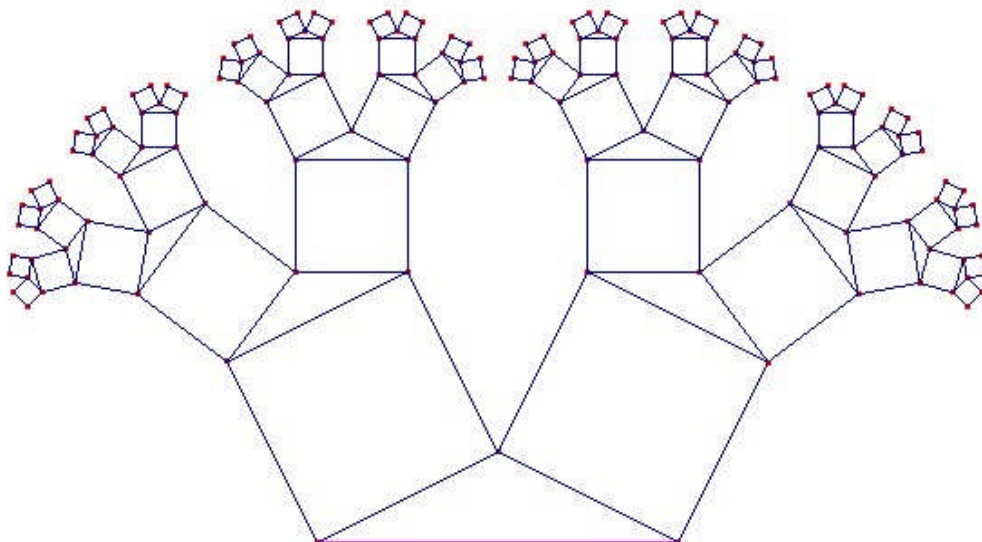
## Alberi Pitagorici

Sono così chiamati perché si basano su costruzioni grafiche iterative che ricordano il teorema di Pitagora. L'iniziatore è il segmento rosa, il generatore la coppia di quadrati costruita sul triangolo rettangolo isoscele che ha il segmento come ipotenusa.

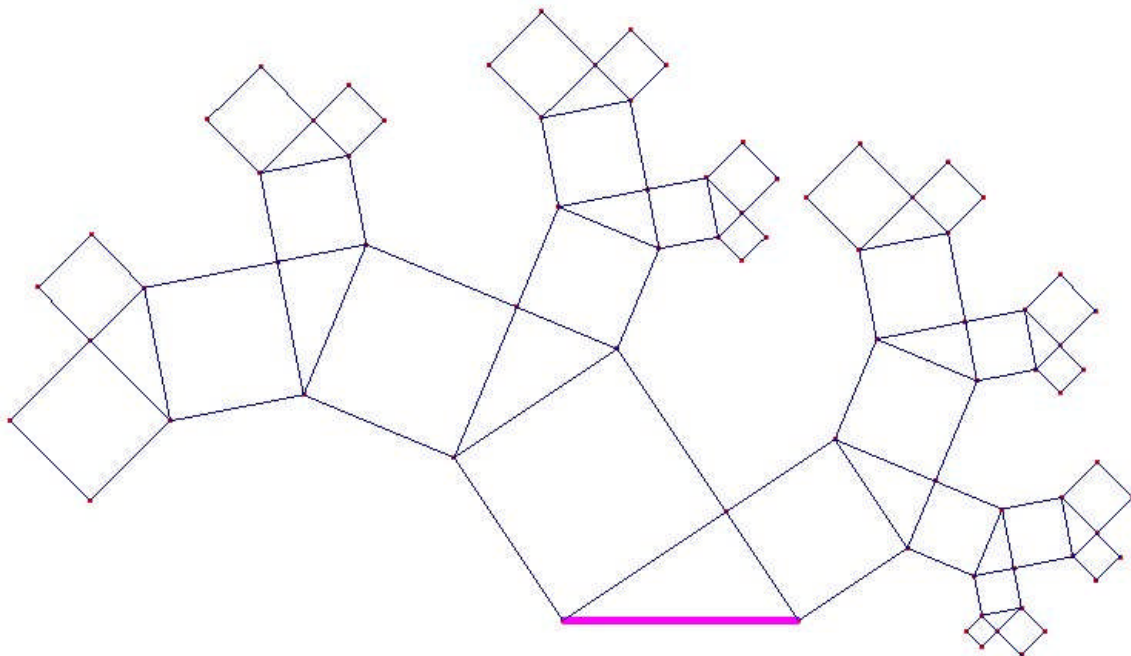
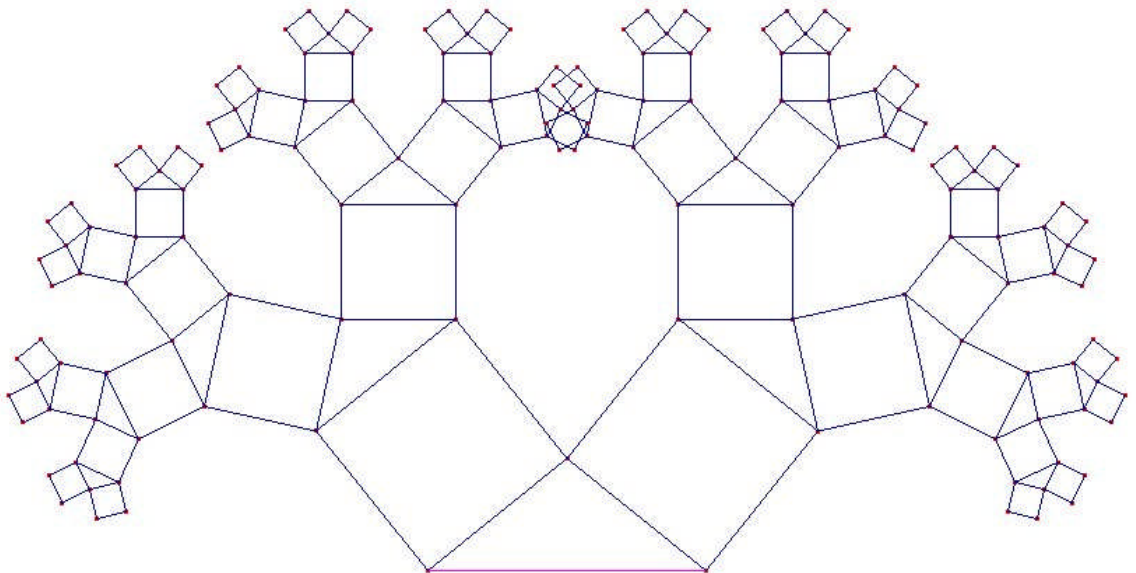


In realtà, questo è più un cespuglio che un albero...

Si possono fare varianti interessanti, usando un triangolo isoscele non rettangolo, o un triangolo rettangolo non isoscele, ottenendo cose molto diverse. Le prime due immagini si riferiscono al primo caso, e sono simmetriche, mentre le altre due al secondo. (ovviamente la figura sopra appartiene come caso particolare ad entrambi i gruppi).







È possibile partire dal lato “superiore” di un rettangolo, o di un trapezio isoscele con la base maggiore molto più piccola dell’altezza, e non utilizzare quadrati ma rettangoli o trapezi simili a quello usato per il tronco, ottenendo alberi più realistici; quelli presentati sono fatti utilizzando Cabri.

## I modelli di Lindenmayer

Aristid Lindenmayer (1925 - 1989) è stato un biologo ungherese.

I modelli di Lindenmayer (**L-system**) sono stati concepiti come una teoria matematica per lo studio della crescita delle piante. Originariamente essi non includevano abbastanza dettagli da cercare di descrivere la struttura di piante particolarmente complesse. In un secondo momento, dopo attente interpretazioni geometriche, sono diventati uno strumento versatile e parecchio utile per ricostruire modelli d’ogni genere.

Il concetto centrale degli **L-system** è la ricorsività. In generale questa tecnica permette di ottenere figure complesse ripetendo parti di un semplice oggetto



iniziale usando un insieme di **regole e produzioni**.

Il miglior modo per capire i sistemi iterativi è quello di operare su stringhe di caratteri.

La prima definizione formale di un sistema di questo tipo fu data all'inizio del 1900 da Thue, ma il maggior interesse nell'iterazione di stringhe si sviluppò negli anni '50 grazie al lavoro sulle grammatiche formali per opera di Chomsky. Egli applicò il concetto d'iterazione per descrivere le caratteristiche sintattiche dei linguaggi naturali.

Nel 1968 un biologo, Aristid Lindenmayer, ha introdotto un nuovo tipo di meccanismo per l'iterazione delle stringhe, successivamente definito L-system. La differenza sostanziale tra le grammatiche di Chomsky e gli L-system sta nel metodo dell'applicazione delle produzioni. Nelle grammatiche di Chomsky le produzioni sono applicate sequenzialmente, mentre negli L-system esse sono applicate parallelamente e simultaneamente trasformano tutte le lettere in una data parola. Questa differenza riflette la motivazione biologica degli L-system. Le produzioni si propongono di focalizzare le divisioni cellulari degli organismi multicellulari, dove le stesse divisioni possono comparire nello stesso momento su tutte le cellule.

Facciamo un esempio (dal libro di Lindenmayer).

Consideriamo delle stringhe (parole) costruite da due lettere  $a$  e  $b$ , che si ripetono più volte in una stringa. Ad ogni lettera si associa una regola iterativa. Supponiamo che ci siano due regole:

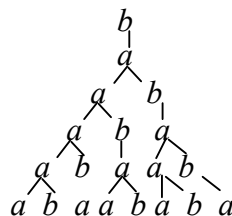
1. La regola  $a \rightarrow ab$  significa che **ogni** lettera  $a$  della stringa verrà sostituita dalla stringa  $ab$ .
2. La regola  $b \rightarrow a$  significa che **ogni** lettera  $b$  della stringa verrà sostituita dalla lettera  $a$ .

Il processo iterativo inizia da una stringa chiamata *assioma*. Supponiamo che il nostro *assioma* sia la sola lettera  $b$ .

Al primo passo iterativo il nostro *assioma*  $b$  si trasforma in  $a$  utilizzando la regola  $b \rightarrow a$ .

Nel secondo passo  $a$  si trasformerà in  $ab$  seguendo la regola  $a \rightarrow ab$ . La stringa  $ab$  è costituita da due lettere, che con la successiva iterazione saranno simultaneamente modificate. La  $a$  diverrà  $ab$ , mentre la  $b$  diverrà  $a$ , il risultato sarà  $aba$ .

In modo simile la stringa  $aba$  diverrà  $abaab$ , quest'ultima  $abaababa$ , poi  $abaababaabaab$  e così via.



## La tartaruga: l'interpretazione delle stringhe

L'interpretazione geometrica delle stringhe applicata per generare immagini schematiche è molto semplice.

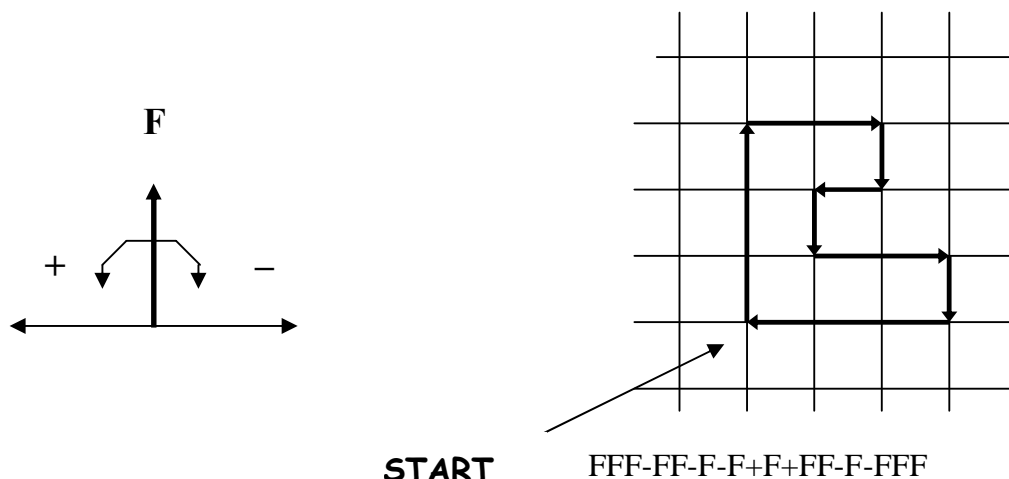
Per modellizzare piante complesse è necessaria un'interpretazione grafica degli L-system.

Il primo risultato in questa direzione fu pubblicato nel 1974 da Frijters, Lindenmayer, HogeWeg e Hesper. In entrambi i casi, gli L-system sono usati per prima cosa per determinare la topologia di ramificazione dei modelli di piante.

Prusinkiewicz utilizzando gli L-system si è specializzato sull'utilizzo del metodo detto della tartaruga (cioè preso dal linguaggio didattico LOGO o linguaggio della tartaruga) per costruire esempi di frattale e modelli di piante.

Le ultime applicazioni degli L-system mediante l'interpretazione della tartaruga, includono realistici modelli di piante erbacee, la descrizione del modello di *Colon* (una forma di arte dell'India del sud), la sintesi di partiture musicali, e l'automatica generazione di curve che riempiono lo spazio. L'idea basilare dell'interpretazione della tartaruga è data qui sotto.

L'incremento angolare è, in questo esempio, di  $90^\circ$ . Inizialmente la testa della tartaruga è rivolta verso l'alto.



Dato il *passo* di lunghezza  $d$  e l'*incremento angolare*  $\delta$ , la tartaruga può rispondere ai comandi rappresentati dai seguenti simboli:

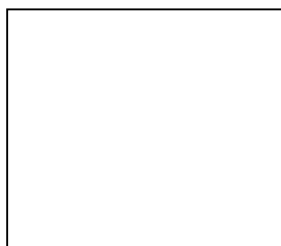
- F movimento in avanti di un segmento lungo  $d$  lasciando una traccia
- f movimento in avanti di un segmento lungo  $d$  senza lasciare una traccia
- + girare a destra di un angolo  $\theta$
- girare a sinistra di un angolo  $\theta$

Per esempio, la figura seguente rappresenta due approssimazioni dell'*isola quadrata di Koch*. Queste figure sono ottenute interpretando le stringhe generate dal seguente L-system:

$\omega$  : F-F-F-F

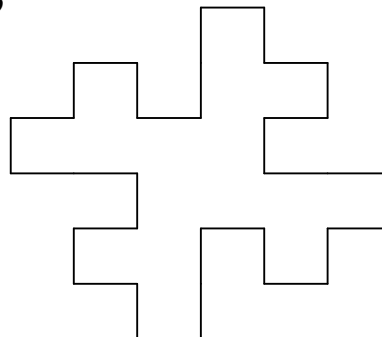
$p$  : F  $\rightarrow$  F-F+F+FF-F-F+F

**a**



**$n = 0$**

**b**



**$n = 1$**

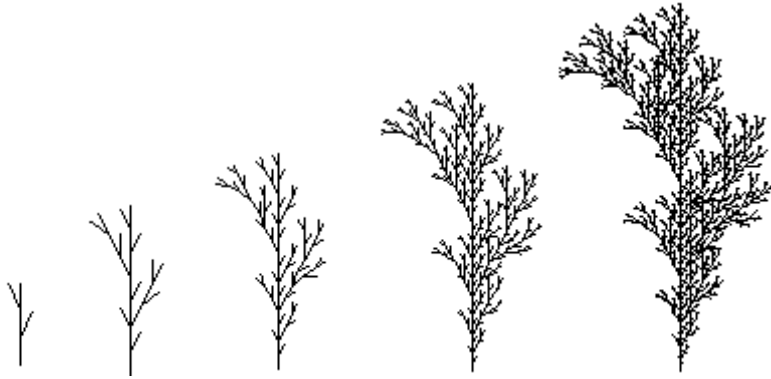
L'immagine corrisponde alle stringhe ottenute dalle iterazioni da 0 a 1. L'incremento  $\delta$  dell'angolo è uguale a  $90^\circ$ . Il passo di lunghezza  $d$  è ridotto di quattro volte nella figura b.

Ci sono vari altri simboli che arricchiscono il linguaggio; tra gli altri:

- [ Salva lo stato corrente nello stack. Permette di creare ramificazioni dal tronco principale
- ] Recupera lo stato precedente dallo stack
- ! Incrementa il diametro della pianta.
- & Riduce il diametro della pianta.
- / Incrementa la lunghezza dei rami della pianta.
- \ Riduce la lunghezza dei rami della pianta.
- { Apre la creazione di un poligono. Viene usato per la descrizione delle foglie.
- } Chiude un poligono.
- . Salva la posizione corrente all'interno di un poligono. Serve per colorare l'interno di una foglia

Esempi:

$\omega$ : F     $p$ :  $F \rightarrow F[-F]F[+F][F]$     angolo di  $30^\circ$  , 5 iterazioni.



Altre immagini di piante costruite con questa tecnica:

