Teorema di Talete

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria, il **teorema di Talete** è un teorema riguardante i legami tra i segmenti omologhi creati sulle trasversali da un fascio di rette parallele.

L'enunciazione e la dimostrazione sono per tradizione, come vuole il nome, attribuite a Talete di Mileto, filosofo greco, a cui il mito attribuisce altri 4 teoremi geometrici, anche se gli storici della matematica sono concordi nell'attribuirgliene la conoscenza ma non la reale paternità, in quanto parrebbe che le proprietà di proporzionalità, espresse nel teorema, fossero già note fin dai tempi degli antichi babilonesi (in un testo del XVII secolo a.C. ca., cfr. Revue d'Assyriologie, XXXI, pp. 61 ss). La prima dimostrazione di cui si abbia documentazione è quella contenuta negli *Elementi* di Euclide risalente al III secolo a.C.

Una piccola curiosità: proprio l'attribuzione a Talete di ulteriori teoremi sta alla base della differenza con cui nel mondo anglosassone ci si riferisce col nome di "*Thales' Theorem*" al teorema dell'angolo retto inscritto nella semi-circonferenza, anch'esso solitamente ascritto dalla leggenda al *Primo filosofo*.

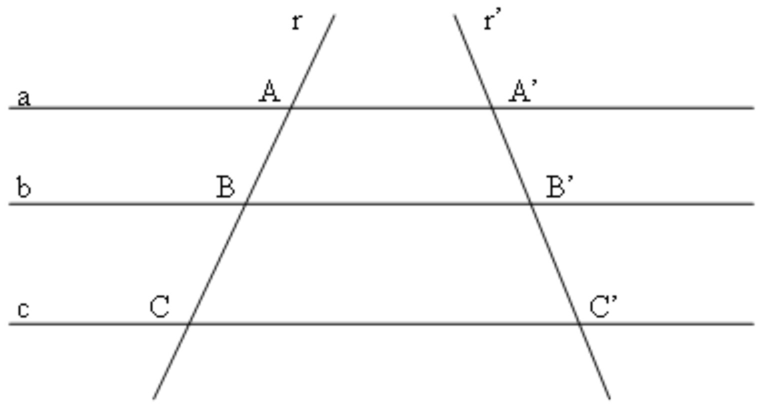
Indice

Enunciato

L'enunciato del teorema è il seguente:

> « un fascio di rette parallele intersecanti due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali. »

Il teorema afferma in pratica che se prese tre parallele a, b, c taglianti due rette trasversali r e r' - rispettivamente nei punti A B C e A' B' C' -, allora il rapporto tra i segmenti omologhi dell'una e dell'altra è sempre costante.



$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

Inoltre se presi AC e A'C', segmenti omologhi, si ha tra loro lo stesso rapporto di AB con A'B' e di BC con B'C', ovvero

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'}$$

Questi calcoli permettono di trovare la lunghezza di uno qualsiasi dei segmenti della quaterna, a patto di averne almeno uno della stessa traversa e due dell'altra, o la loro somma.

$$AB = \frac{A'B' \times BC}{B'C'} = \frac{AC \times (A'C' - B'C')}{A'C'} = \frac{BC \times A'B'}{A'C' - A'B'}$$

Ovviamente queste relazioni valgono presa qualsiasi coppia di segmenti omologhi.

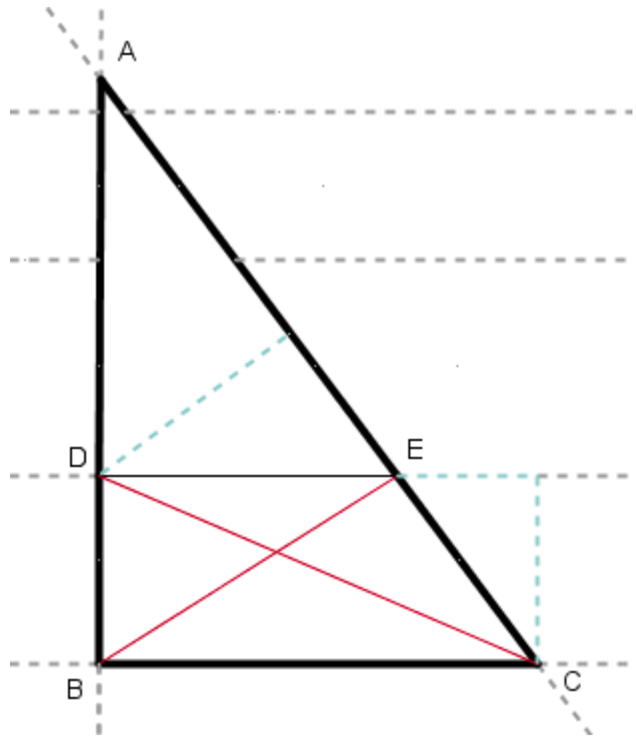
Dimostrazione

Euclide dimostra[1] il teorema di Talete indirettamente, facendo uso delle proporzionalità fra le aree dei triangoli, pertanto potrebbe essere di non così immediata comprensione il legame fra la seguente dimostrazione e il risultato finale, la verifica del teorema in questione.

> « *Se una linea retta è disegnata parallela ad uno dei lati di un triangolo, allora taglia proporzionalmente i lati del triangolo...* »
> (Elementi, VI 2)

Sia dato un triangolo ABC, tagliato da un segmento DE parallelo a uno dei suoi lati (in questo caso BC). Si avrà quindi, secondo la tesi del teorema, che BD sta a AD come CE sta AE[2]

$$BD : AD = CE : AE$$



Si congiungano gli estremi di DE con gli opposti del lato parallelo, evidenziando così i due triangoli BDE e CDE. Tali triangoli sono equiestesi, hanno cioè la medesima area, in quanto possiedono la stessa base e sono tra le medesime parallele DE e BC[3]. Il segmento DE ha anche creato il triangolo ADE e, siccome a "grandezze" uguali corrispondono rapporti uguali con la stessa "grandezza" [Prop. V.7], il triangolo BDE sta a ADE, esattamente come CDE sta a ADE[4].

$$BDE : ADE = CDE : ADE$$

Ma il triangolo BDE sta a ADE come BD sta a DA, perché avendo la stessa altezza (nel caso in esempio DE) devono stare l'uno all'altro come le rispettive basi [Prop. VI.1], così come, per la stessa ragione, il triangolo CDE sta a ADE, come CE sta a EA. Per tanto BD sta a DA, come CE sta a EA[5].

$$BD : AD = CE : AE \quad \text{Cvd.}$$

Dal teorema di Talete, come si possono evincere dalla dimostrazione, si derivano due importanti corollari complementari, che assieme costituiscono per intero l'originaria proposizione di Euclide

Una retta parallela al lato di un triangolo determina segmenti proporzionali sugli altri due lati.

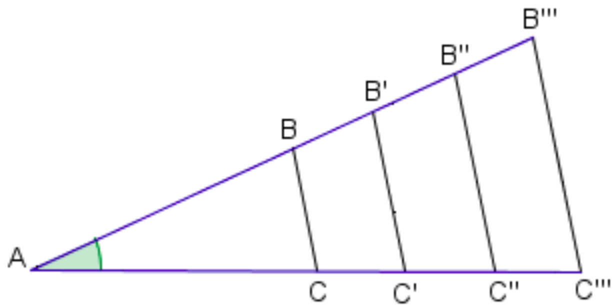
Una retta che determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

Conseguenze

Triangoli simili

L'applicazione del teorema di Talete ai triangoli è in grado di spiegare il secondo criterio di similitudine dei triangoli che afferma:

Due triangoli, aventi coppie di lati proporzionali e l'angolo ivi compreso congruente, sono *simili.*



Se, come afferma, infatti, la seconda parte della proposizione euclidea, tutti i segmenti omologhi sono in proporzione $\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{B'B''}{C'C''}$, allora B'C' e B''C'' non possono che essere paralleli a BC e dunque i triangoli ABC, AB'C' AB''C'', sono per forza triangoli simili. Questo ci permette, ricollegandoci al fascio di rette, di stabilire una serie di legami non solo fra i segmenti omologhi delle traverse, ma anche sulle parallele.

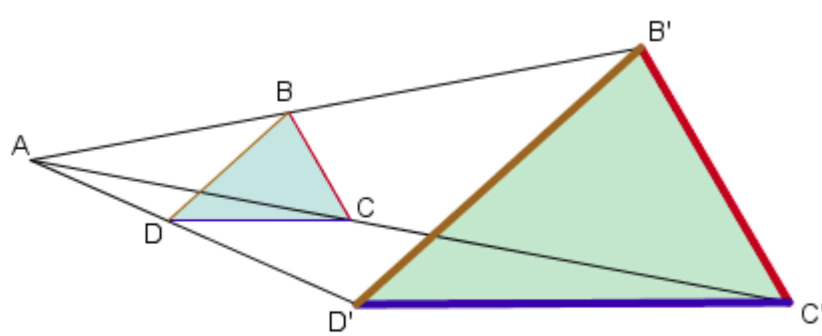
$$AB : AB' = AC : AC' = BC : B'C'$$ [6]

Condizione necessaria per la validità di tali rapporti è che $A{=}A'$, solo così, infatti, le trasversali sono assimilabili ai lati di un triangolo, dalla cui similitudine deriva la proporzionalità dei segmenti paralleli.

La cosa più importante è che permette di conoscere la lunghezza del generico segmento B'C', attraverso le seguenti relazioni. $B'C' = \frac{AB' \times BC}{AB}$

Omotetia

Nelle trasformazioni del piano il teorema di Talete è anche in grado di spiegare trasformazioni come l'omotetia sia in grado di mantenere invariate le proporzioni delle figure.



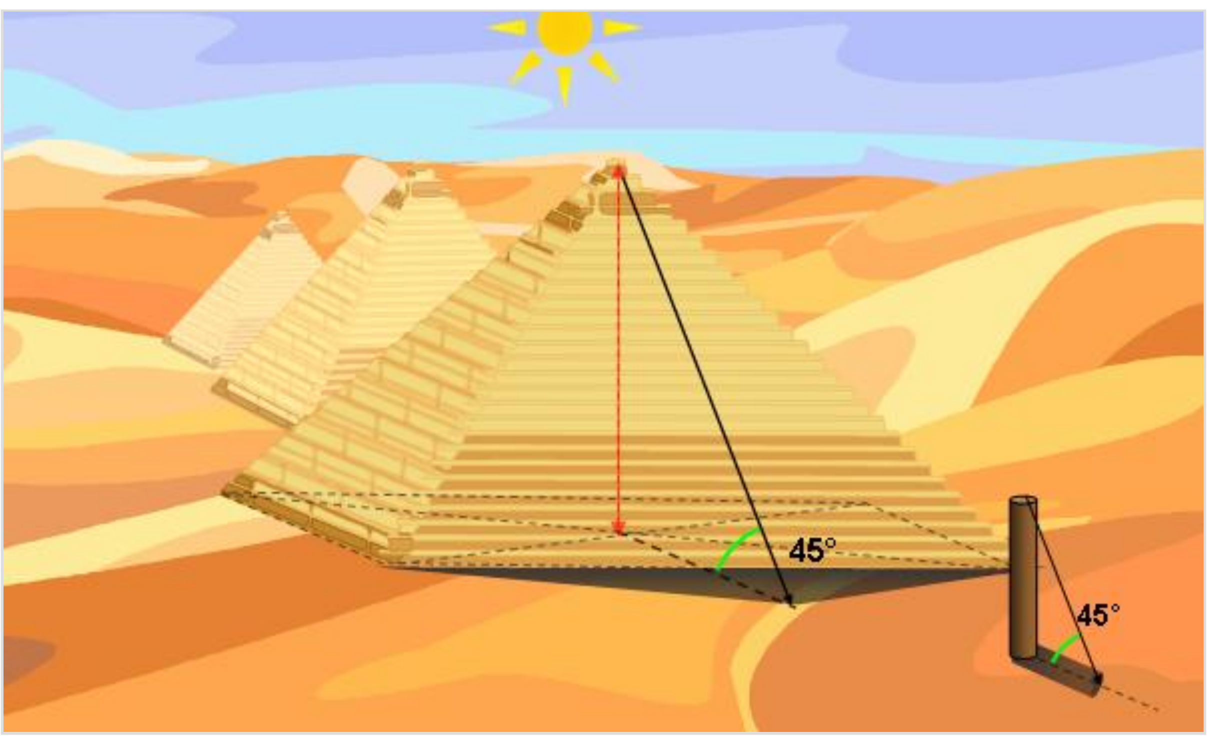
BCD e B'C'D' sono figure simili, tutti loro lati omologhi hanno lo stesso rapporto, se infatti prendiamo per esempio la coppia BC e B'C' rispetto ad A li possiamo concepire come i terzi lati di due triangoli simili, dove A rappresenta il *centro* dell'omotetia e AB/AB' come il *rapporto* della stessa.

Cenni storici

Vuole la leggenda, come racconta Plutarco[7], che Talete viaggiando per l'Egitto in cerca di sacerdoti della valle del Nilo da cui apprendere le conoscenze astronomiche, risalendo il fiume avrebbe sostato nei pressi della Piana di Giza, attirato dalla mole sorprendente della Piramide di Cheope, ove il faraone Amasis, giunto a conoscenza della fama del sapiente, lo sfidò a dargli la misura corretta dell'altezza.

Per qualunque persona, anche dotata dei più sofisticati strumenti dell'epoca, si sarebbe trattato di un'impresa che, se non ardua, avrebbe certamente richiesto una notevole quantità di tempo sia per compiere le misure che i calcoli, ma sempre le fonti ci narrano che Talete sapesse già che a una determinata ora del giorno la nostra ombra eguaglia esattamente la nostra altezza[8]; e quindi non avrebbe fatto altro che attendere l'ora propizia e dimostrare le sue doti, sbalordendo lo stesso faraone che si disse:

> « ...stupefatto del modo in cui [abbia] misurato la piramide senza il minimo imbarazzo e senza strumenti. Piantata un'asta al limite dell'ombra proiettata dalla piramide, poiché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli, [ha] dimostrato che l'altezza dell'asta e quella della piramide stanno nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre. »
>
> (Plutarco, *Convivio dei Sette Sapienti*)



Non sappiamo se Talete abbia realmente dimostrato il teorema che porta il suo nome o se (molto più probabilmente) abbia semplicemente usato la proprietà espressa nel suo enunciato, dopo averla appresa da altri, magari dai Caldei, come sostengono alcuni studiosi; se però si vuole considerare l'aneddoto non infondato, bisogna per forza presumere che avesse buona conoscenza delle proprietà citate e delle implicazioni inerenti ai triangoli simili[9].

Affinché la proiezione dell'ombra sia uguale all'altezza occorre che i raggi del sole colpiscano l'oggetto con un'inclinazione pari a 45°, come la diagonale di un quadrato, il che, dato i circa 30° di latitudine Nord della Grande Piramide, implica che Talete fosse presente sul luogo o nel giorno del 21 novembre o del 20 gennaio, eventualità abbastanza inverosimile; più facile è invece ipotizzare che abbia sì usato l'ombra della piramide per misurarne l'altezza, ma sfruttando il rapporto che ha con essa, prendendo a riferimento l'omologo rapporto tra il paletto e la sua proiezione.

Note

1. ^ Per agevolare l'individuazione delle altezze è stato preso a riferimento un triangolo rettangolo, ma la dimostrazione originale, offerta da Euclide, ha valore generale per ogni genere di triangolo.
2. ^ I lati del triangolo AB e AC possono essere intesi come segmenti delle trasversali r e r', e DE e BC come elementi di un fascio di rette parallele, pertanto la dimostrazione del teorema avviene verificando la relazione sui segmenti dei lati tagliati da DE.
3. ^ Alla 38^ proposizione del I libro degli elementi, viene dimostrato che due triangoli aventi la stessa base e contenuti dentro le stesse parallele hanno la medesima area. La cosa è abbastanza intuibile già dalla formula dell'area $B*h/2$, poiché la base, costituita da DE, e le altezze, in un caso DB e nell'altro la proiezione in azzurro, sono uguali pure le aree dei due triangoli non possono che essere uguali.
4. ^ Il termine grandezza è un termine generico, così come Euclide ha usato nei suoi primi assiomi, ma si tratta di un'affermazione generale che in questo caso si riferisce alle aree dei triangoli, la cui relazione può essere così sintetizzata
5. ^ I triangoli vengono visti da un altro punto di vista, ma nulla cambia: BD e AD sono visti come le basi e DE come l'altezza, lo stesso avviene per CE e EA e la loro altezza h. Sostituendo ai rapporto le aree dei triangoli si verificano le proporzioni $\frac{BDE}{ADE} = \frac{BD \times DE/2}{AD \times DE)/2} = \frac{BD}{AD}$ e $\frac{CDE}{ADE} = \frac{CE \times h/2}{EA \times h/2} = \frac{CE}{EA}$
6. ^ questi rapporti sono talvolta noti col nome di *Piccolo Teorema di Talete*
7. ^ *Convivio dei Sette Sapienti* (2, 147 A)
8. ^ Diogene Laerzio,*Vite*
9. ^ A rafforzare la tesi, v'è un altro aneddoto, che vuole che Talete fosse stato il primo uomo a dimostrare come si potesse conoscere la distanza di una nave in mare solo osservandone l'altezza dell'albero maestro.

Voci correlate

- Retta
- Talete
- Euclide

Altri progetti

- **Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **teorema di Talete (https://commons.wikimedia.org /wiki/Category:Intercept_theorem?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- *Il teorema in versione Java*, *math.it*.
- (EN) Gli Elementi di Euclide (http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI /propVI2.html) (la dimostrazione tradotta dal greco)
- *Teorema di Talete*, in *Tesauro del Nuovo soggettario*, BNCF, marzo 2013.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_di_Talete& oldid=84782169"

Categoria: Geometria euclidea
